- Globalisierung der Konvergenz des Newton-Verfahrens: Führe Schrittweite in (6.14) ein

$$x^{k+1} := x^k + \lambda_k s^k, \quad 0 < \lambda_k \leq 1$$

(6.15, gedämpftes Newton-Verfahren)

Teste, ob

$$\| f'(x^k)^{-1} f(x^{k+1}) \| \leq \Theta^{(0)} \cdot \| f'(x^k)^{-1} f(x^k) \| \qquad (6.16)$$

mit $x^{k+1} = x^k + \lambda_k^{(0)} s^k$, $\Theta^{(0)} := 1 - \frac{\lambda_k^{(0)}}{2}$

falls (6.16) nicht erfüllt, wiederhole den Test mit $\lambda_k^{(1)} := \frac{1}{2} \lambda_k^{(0)}$ usw.

(Monotonietest)

Falls $\lambda_k^{(n)} < \lambda_{min}$: Abbruch

(6.15) geeignet für Startwerte, die nicht notwendig „nahe" bei x^* liegen.

Kap. 7 Interpolation

Allgemeines Interpolationsproblem:

Seien zu $(n+1)$ Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ Daten gegeben $(f(x_0), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sei G_n ein $(n+1)$-dim. Raum stetiger Funktion.

Interpolationsproblem: Bestimme $g_n \in G_n$, so dass $g_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

[Lagrange-Interpolation] (7.1)

§ 7.1 Polynominterpolation

$$G_n := \Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R} \right\}$$

(Polynomraum vom Grade n)

Satz 7.1

Sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Zu beliebigen Daten $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ existiert genau ein $P_n \in \Pi_n$ mit $P_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$.

Es gilt $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot \ell_{jn}(x)$

$$\ell_{jn}(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$ (Lagrange-Fundamentalpolynom)

<u>Beweis</u>: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

klar

(einsetzen!)

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{P}_n$ weitere Lösung des Problems (7.1), dann gilt $Q_n(x_i) = P_n(x_i) - \tilde{P}_n(x_i) = 0$ $i = 1, \dots, n$ für $Q_n := P_n - \tilde{P}_n$.

D.h. Q_n (Polynom n-ten Grades) hat n Nullstellen, es folgt $Q_n(x) \equiv 0$ für alle x (Fundamentalsatz der Algebra).

Lagrange-Polynome in der Praxis:

- Darstellung aufwendig
- ggf. instabil (Auslöschung!)

aber: häufig in der Praxis nur Auswertung der Interpolation an (wenigen) bestimmten Stellen gefragt

Bezeichne

$$P_n =: P(f\,|\,x_0,\dots,x_n) \quad (7.2)$$

das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom aus Satz 7.1.

Lemma 7.3 (Aitken)

Es gilt $P(f|x_0,\dots,x_n)(x) =$

$$\frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\dots,x_{n-1})$$

(Auswertung von P bei x!)

Definiere $P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\dots,x_i)(x)$

Wg. Lemma 7.3:

$$P_{i,k} = \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}} \cdot P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}} P_{i-1,k-1}$$

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} \cdot \left(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}\right) \qquad (7.4)$$

Aitken-Neville Schema (7.5)

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$\cdots$	$P_{i,n}$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$			
x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$		
x_3	$f(x_3)$	$P_{3,1}$		$\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_n	$f(x_n)$	$P_{n,1}$	$\cdots$	$\cdots$	$P_{n,n}$

Beispiel 7.6

$n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 4$, $f(x_2) = 2$

Aufgabe: werte das Interpolations-polynom bei $x = 0.5$ aus (mit Aitken-Neville Schema, d.h. berechne $P(f|0,1,2)(0.5) = ?$)

Nach (7.4)

$$P_{1,1} = P_{1,0} + \frac{x - x_1}{x_1 - x_0}(P_{1,0} - P_{0,0})$$

$$= f(x_1) + \frac{x-1}{1-0}(f(x_1) - f(x_0))$$

$$= 4 + \frac{-0.5}{1}(4-1) = 2.5$$

analog:

$$P_{2,1} = 2 + \frac{-1.5}{1}(2-4) = 5$$

$$P_{2,2} = P_{2,1} + \frac{x - x_2}{x_2 - x_0}(P_{2,1} - P_{1,1})$$

$$= 5 + \frac{-1.5}{2}(5 - 2.5) = \frac{25}{8}$$

$$= P(f|0,1,2|)(0.5)$$

Newton-Darstellung, dividierte Differenzen

Idee wieder: berechne $P(f|x_0,\dots,x_n)$ aus $P(f|x_0,\dots,x_{n-1})$

Lemma 7.7

Für das Lagrange-Interpolations-polynom gilt:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

mit $\delta_n = \dfrac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}$

Beweis: Es gilt nach Definition von $P_{n-1}(x)$:

$$P_{n-1}(x_i) = f(x_i) \quad i < n$$

Setze $Q_n(x) := P_{n-1}(x) + \delta_n \cdot (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$

dann gilt auch

$$Q_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n-1$$

δ_n ist nun so gewählt, dass auch gilt $Q_n(x_n) = f(x_n)$.

Wg. Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms (Satz 7.1) folgt

$$Q_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$$

Notation 7.8

Man schreibt $\delta_n =: [x_0, \ldots, x_n] f$

Wendet man Lemma 7.7. sukzessive auf $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$, ... an, so erhält man

Newton'sche Interpolationsformel

$$P(f|x_0,\dots,x_n) = [x_0]f + (x-x_0)\cdot [x_0,x_1]f + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2]f + \dots + (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)[x_0,\dots,x_n]f \tag{7.9}$$

Bemerkung 7.10

Die Polynome $w_0(x) := 1$, $w_k(x) := (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})$, $k = 1,\dots,n$ bilden eine Basis des Polynomraums Π_n (siehe Bsp. 2.6) die sog. Newtonbasis, denn die Koeffizienten $[x_0,\dots,x_n]f$ sind wg. Satz 7.1/Lemma 7.7 eindeutig!

<u>Lemma 7.11</u> (dividierte Differenzen)

$$[x_0,\dots,x_n]f = \frac{[x_1,\dots,x_n]f - [x_0,\dots,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

<u>Beweis</u>: Einsetzen von (7.3) in die Aitken-Darstellung in Lemma 7.3

Rekursion liefert

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]f$	
x_0	$[x_0]f = f(x_0)$			
		$[x_0, x_1]f$		
x_1	$f(x_1)$		$[x_0, x_1, x_2]f$	
		$[x_1, x_2]f$		$\dots$
x_2	$f(x_2)$		$[x_1, x_2, x_3]f$	
		$[x_2, x_3]f$		
x_3	$f(x_3)$			

Tabelle 7.12
(dividierte Differenzen)