Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 4
SoSe 12

Projekte - Teil 1

(Fr. 1.6.2012)

Die Projekte sollen bis 14.7. bearbeitet werden. Es soll eine kurze Ausarbeitung (maximal 5 Seiten!) geschrieben und abgegeben werden. Diese wird benotet und zählt 30% der Gesamtnote.

Projekt 1 *(Symm'sche Integralgleichung auf dem Schlitz)*

Wir betrachten die Symm'sche Integralgleichung auf dem Schlitz $V\phi = f$ auf dem Schlitz $\Gamma = [-1,1] \times 0$. Diese wollen wir mit einer Randelementmethode lösen. Als Ansatzraum sollen Stückweise konstante Funktionen auf einem uniformen Gitter verwendet werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Galerkin Matrix für die oben beschriebene Methode eine Toeplitz-Matrix ist.

(b) Schauen Sie sich den Levinson-Algorithmus zum Lösen eines LGS mit Toeplitz-Matrix an (z.B. Golub Van Loan, Matrix Computations, S. 196).

(c) Schreiben Sie eine Funktion, die die Galerkin-Matrix als Toeplitz-Matrix aufstellt. Es soll nur ein Vektor der Länge n zurück gegeben werden (an Stelle einer $n \times n$-Matrix).

(d) Der Levinson Algorithmus ist in der Funktion `levinson` implementiert. Nutzen Sie diese um ihr LGS zu lösen. Implementieren Sie eine uniforme h-Methode und verfeinern Sie so weit wie es ihr Computer zulässt. Vergleichen Sie die Ergebnisse, speziell die Laufzeiten für das Aufstellen der Matrix bzw. das Lösen des Gleichungssystems mit den Ergebnissen für das volle System.

Fragen/Hinweise für die Ausarbeitung:

- KURZE Herleitung der Galerkin-Methode
- Was ist eine Toeplitz-Matrix
- Herleitung: Galerkin-Matrix = Toeplitz-Matrix
- Implementierung
- Numerische Ergebnisse

Projekt 2 *(Algebraische Gitter)*
Ein algebraisches Gitter mit N Punkten auf $[0, 1]$ bzgl. des Punktes 0 ist gegeben durch

$$x_i = \left(\frac{i}{n}\right)^\beta, \quad i = 0, \dots, N.$$

Der Parameter $\beta > 0$ ist fest gewählt. Wir betrachten zunächst die Symm'sche Integralgleichung

$$V\phi = f$$

auf $\Gamma = [0, 1] \times \{0\}$. Diese soll mit der Randelementmethode gelöst werden. Als Ansatzfunktionen sollen stückweise konstante Funktionen auf einem algebraischen Gitter verwendet werden. Unser erstes Ziel ist es, die Approximationsgüte des Ansatzraumes abzuschätzen. Hierzu nehmen wir an, dass die exakte Lösung ϕ gegeben ist durch x^α, $\alpha \in (0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie den Interpolationsfehler $e_\beta := \|\phi - P_\beta\|_\infty$, wobei P_β ein stückweise konstantes Polynom auf dem algebraischen Gitter mit Parameter β ist, näherungsweise durch

$$e_\beta = \max_{i=0\dots N} \frac{1}{2} \left|\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)\right|.$$

Bestimmen Sie zu verschiedenen α den Parameter β so, dass e_β minimal wird (numerisch). S tellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang zwischen α und β auf.

Der nächste Schritt ist es, die Gleichung

$$V\phi = \frac{\log 2}{2}$$

auf $\Gamma = [-1, 1] \times \{0\}$ numerisch zu lösen. Die exakte Lösung ist gegeben durch $\phi(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Die Funktion ϕ hat Singularitäten der Form $x^{-1/2}$ bei ± 1. Wieder wollen wir den optimalen Parameter β für ein algebraisches Gitter numerisch bestimmen.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `[coordinates, elements] = getgrid(n,beta)`, die ein algebraisches Gitter, welches zu den Punkten $+1$ und -1 hin feiner wird, mit N Punkten und Parameter `beta` erstellt. Z.B. hat ein algebraisches Gitter mit $N = 5$ und $\beta = 2$ die Punkte

$$\{-1, -1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2, -1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2, -1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2, -1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2, 0, 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2, 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2, 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2, 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2, 1\}.$$

(c) Berechnen Sie für verschiedene β jeweils für $1, 2, 4, 6, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$ die Galerkin-Lösung ϕ_N sowie den Fehler $|||\phi - \phi_N|||$ in der Energie-Norm (für die Fehler-Berechnung können Sie die Funktion `errNeumann` verwenden).
Zeichnen Sie für jedes β die Kurve e_N über N (loglog) und berechnen Sie die Konvergenzrate des Verfahrens für jeden Parameter β.

(d) Bestimmen Sie β so, dass das Verfahren die maximale Konvergenzrate hat.

Fragen/Hinweise für die Ausarbeitung:

- KURZE Herleitung der Galerkin-Methode
- Beschreibung algebraisches Gitter
- Herleitung für den interpolationsfehler
- Implementierung Numerische Ergebnisse für Teil a)
- Implementierung und Numerische Ergebnisse zu Teil c)