Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 4
SoSe 12

Übungsblatt 1

(Fr. 4.5.2012)

Aufgabe 1 *(Fredholm'sche Integralgleichung)*

Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \int_0^1 \frac{1}{2}(x+1)e^{-xy}\varphi(y)dy = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(x+1)}, x \in [0,1]$$

die Lösung $\varphi(x) = e^{-x}$ hat.

Aufgabe 2 *(Nyström Methode)*

Wir betrachten die Nyström Methode zum Lösen einer Fredholmschen Integralgleichung 2. Art

$$\varphi - A\varphi = f$$

wobei der Integral-Operator A durch

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a,b]$$

gegeben ist und die Kernfunktion K stetig ist.
Idee der Nyström Methode ist es, den Operator A mittels einer Quadraturformel zu approximieren. Mit

$$(A_n\varphi_n)(x) := \sum_{k=1}^n \omega_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)})\varphi_n(x_k^{(n)}), \quad x \in [a,b]$$

suchen wir nun die Lösung φ_n der Gleichung

$$\begin{aligned} &\varphi_n - A_n\varphi_n = f \\ \Longleftrightarrow\ &\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^n \omega_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)})\varphi_n(x_k^{(n)}) = f(x), \quad x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Werten wir diese Gleichung nun an den Quadraturpunkten $x_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$ aus, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `function phi_n = nystroem(xQ,wQ,K,f)`, die die Nyström Methode wie oben beschrieben durchführt. `xQ` and `wQ` sind hierbei Vektoren, die die Quadratur-Knoten und -Gewichte beinhalten und `K` und `f` sind function handles für die Kernfunktion und die rechte Seite.

(b) Testen Sie Ihre Funktion für die Integralgleichung aus Aufgabe 1 indem Sie die Lösung φ_n für verschiedene n als stückweise lineare Funktion sowie die exakte Lösung zeichnen. Verwenden Sie für die Quadratur eine zusammengesetzte Mittelpunktregel,eine zusammengesetzte Trapezregel und eine zusammengesetzte Simpsonregel mit jeweils n Teilintervallen.

Wir haben nun eine Funktion, die uns die Werte der gesuchten Funktion φ_n an den Quadraturpunkten $x_k^{(n)}$ berechnet. Die nächste Aufgabe ist es nun, eine Funktion zu schreiben, die die Funktion φ_n an einer beliebigen Stelle $x \in [a,b]$ auswertet. Die einfachste Möglichkeit ist es, die Funktion φ_n als stückweise lineare Funktion aufzufassen:

(c) Schreiben Sie eine Funktion `function val = evalNystroemLin(phi_n, xQ, x)`, die die Funktion φ_n an den Punkten `x` (gegeben durch einen Vektor) auswertet, indem für jeden Auswertungspunkt $x \in [x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)}]$ der Wert des linearen Interpolationspolynoms bzgl. der Punkte $x_j^{(n)}$ und $x_{j+1}^{(n)}$ an der Stelle x berechnet wird.

Wir erhalten bessere Ergebnisse, wenn wir die Auswertung etwas geschickter angehen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} &\varphi(x) - (A\varphi)(x) = f(x) \iff \varphi(x) = f(x) + (A\varphi)(x) \\ \Rightarrow &\varphi_n(x) = f(x) + (A_n\varphi_n)(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \omega_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)})\varphi_n(x_k^{(n)}). \end{aligned}$$

(d) Schreiben Sie eine Funktion `function val = evalNystroem(K,f,xQ,wQ,phi_n,x)`, die die Funktion φ_n wie beschrieben auswertet.

Nun wollen wir uns die L^∞-Fehler der verschiedenen Methoden ansehen.

(e) Berechnen Sie für die Integralgleichung aus Aufgabe 1 die L^∞ Fehler

$$e_n := ||\varphi - \varphi_n||_{L^\infty([0,1])} = \max_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$$

näherungsweise, indem Sie die Differenz zwischen numerischer und exakter Lösung auf einem feinen äquidistanten Gitter auswerten. Zeichnen Sie die Kurven e_n über n für die drei Quadratur Methoden und beide Auswertungsfunktionen (insgesamt 6 Kurven) in doppelt logarithmischer Skala, versuchen Sie aus der Grafik die Konvergenzraten zu bestimmen und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3 *(Legendre Ansatz und Kollokation)*

Wir betrachten die Symm'sche Integralgleichung

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi(y)\log|x-y|\,dy = \frac{\log(2)}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

(Dies ist eine Fredholm'sche Intagralgleichung erster Art.)
Um diese Gleichung zu lösen, wollen wir den Ansatz

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x), \quad x \in [-1,1]$$

verwenden, wobei die $P_i(x)$ Legendre Polynome sind.
Setzen Sie diesen Ansatz in die Integralgleichung ein. Werten wir die Gleichung nun an so genannten Kollokationspunkten x_k, $k = 0,\dots,n$ ($x_k \in [-1,1]$) aus, so erhalten wir ein lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten u_i, $i = 0,\dots,n$. Leiten Sie dieses lineare Gleichungssystem her.

(a) Implementieren Sie die Kollokationsmethode für die obige Integralgleichung. Verwenden Sie als Kollokationspunkte

  (i) die äquidistanten Punkte $x_k = \frac{2k+1}{2(2n-1)}$, $k = 0,\dots,n$ (überlegen Sie, wie man auf diese Punkte kommt)

  (ii) Gauss-Punkte (die Funktion `[wg,xg] = gauss(n)` berechnet `n` Gauss Punkte)

  Die Funktion `function out = qtm1(x,n)` liefert für Kollokationspunkte x_k, $k = 0,\dots,n$ (gespeichert im Vektor `x`) die $(n+1)\times(n+1)$- Matrix $V = (v_{i,j})$, $v_{i,j} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\log|x_i - y|P_j(y)dy$. Verwenden Sie diese Matrix um die Koeffizienten der Lösung φ für verschiedene n zu bestimmen.
  Testen Sie Ihre Implementierung indem Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ vergleichen. Für das Auswerten der numerischen Lösung können Sie die Funktion `leg = bLegendre(x,n)` verwenden, die die ersten `n` Legendre Polynome an den Werten im Vektor `x` auswertet.

(b) Zeichnen sie den L^∞-Fehler e_n über n in doppelt logarithmischer Skala für $n \in \{2,4,8,16,32,64,128,256,512\}$.