Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 1

(Fr. 1.6.2012)

Aufgabe 1 *(Einfachschichtpotential Analytisch)*

(a) Berechnen Sie das Einfachschichtpotential $(V1)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b \log|x-y|\,dy$ für ein reelles Intervall $[a,b]$ und $x \in \mathbb{R}$ analytisch.

(b) Schreiben Sie eine Funktion potVSlit(a,b,x), die das Einfachschichtpotential $(V1)(x_i)$ für das Intervall $[a,b]$ und einen Vektor x aus reellen Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$ auswertet. Zeichnen Sie das Einfachschichtpotential für $[a,b] = [-1,1]$ und $x \in [-3,3]$.

(c) Laden Sie von der Homepage die Dateien `potV.m`, `potK.m`, `qtm1.x`, `qt0.x` herunter. Die Dateien `qtm1.x`, `qt0.x` sind für Matlab kompilierte C-Dateien. Die Endung .x hängt vom Betriebssystem Ihres Computers ab:

- Windows 32bit: x = mexw32, 64bit: x = mexw64
- Linux 32bit: x = mexa32, 64bit: x = mexa64
- Mac 64bit: x = maci64

Die Funktion `potV.m` berechnet das Einfachschichtpotential $(VP_k)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$, wobei P_k das k-te Legendre Polynom ist. Die Funktion `potK.m` berechnet das Doppelschichtpotential $(KP_k)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$, wobei P_k das k-te Legendre Polynom ist. (Siehe auch Beschreibung im Code.)
Zeichnen Sie das Einfach- und Doppelschichtpotential für $T = [-1,1] \times 0$ auf $[-2,2] \times [-1,1]$ für verschiedene Polynomgrade k. Verwenden Sie zum Zeichnen die Funktion `showPot`.

Aufgabe 2 *(Lösen der Symm'schen Integralgleichung)*
Wir wollen nun die Symm'sche Integralgleichung

$$V\phi = f$$

mit einer Galerkin-Methode lösen. Hier ist $\Gamma = \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Lipschitz-Gebiet, $\phi, f \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Die schwache Formulierung lautet

$$(V\phi, \psi)_{L^2(\Gamma)} = (f, \psi)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Nun wählen wir einen diskreten Teilraum $S_0(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$, der die Basis $\psi_1, \ldots, \psi_N$ hat. Damit lässt sich ϕ schreiben als $\phi = \sum_{i=1}^N \varphi_i \psi_i$ und die schwache Formulierung wird zu

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j (V\psi_j, \psi_i)_{L^2(\Gamma)} = (f, \psi_i)_{L^2(\Gamma)} \quad i = 1, \ldots, N.$$

Wir erhalten also ein Gleichungssystem

$$\mathbf{V}\varphi = \mathbf{f}.$$

Wir müssen uns noch Gedanken über die Wahl des diskreten Ansatzraums $S_0(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ machen. Zunächst unterteilen wir den Rand Γ in Geradenstücke: $\Gamma = \bigcup_{k=1}^N T_k$. Damit definieren wir die k-te Basisfunktion ψ_k als charakteristische Funktion von T_k, $\psi_k = \chi_{T_k}$ (d.h. wir approximieren die Lösung ϕ durch eine stückweise konstante Funktion).

Um den Rand in Geradenstücke zu unterteilen verwenden wir folgende Datenstrukturen:
`coordinates`: Matrix, die die Koordinaten der Eckpunkte der Geradenstücke enthält.
`elements`: Matrix, die die Nummern der Eckpunkte für jedes Geradenstück enthält.
Für ein Einheitsquadrat erhalten wir also Folgendes:

$$coordinates = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad elements = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gruppe 1:
Vervollständigen Sie die Funktion `buildV`. Die Funktion berechnet die Galerkin Matrix

$$\mathbf{V} = (v_{i,j}), \quad v_{i,j} = (V\psi_j, \psi_i)_{L^2(\Gamma)} = \int_{T_i} \int_{T_j} \log|x - y| \, ds_x \, ds_x.$$

Das innere Integral wird hierbei analytisch berechnet (Siehe Aufgabe 1), das äußere Integral soll mittels Gauß-Quadratur approximiert werden. Leiten Sie die Formel für die Quadratur zunächst mit Stift und Papier her und starten Sie dann mit der Implementierung. Für die Implementierung können Sie die Funktion `potV` verwenden (Hinweis: $P_0 = 1$).

Gruppe 2:
Vervollständigen Sie die Funktion `buildSymmRHS_f`. Die Funktion berechnet den Vektor

$$\mathbf{f} = (f_i), \quad f_i = (f, \psi_i)_{L^2(\Gamma)} = \int_{T_i} f(x) \, ds_x,$$

wobei `f` als function handle gegeben ist. Das Integral soll hierbei mittels Gauß-Quadratur approximiert werden.

Hinweis für die Gauß-Quadratur:
Für jedes Geradenstück T_k können wir die Abbildung

$$\gamma_{T_k} : [-1, 1] \to T_k, \quad t \mapsto m_k + t u_k$$

definieren. Hier ist m_k der Mittelpunkt von T_k und u_k der Vektor vom Mittelpunkt zum rechten Eckpunkt (im mathematisch positiven Sinne).
Die Funktion [weights, nodes] = gauss(n) liefert Ihnen n Gauß-Gewichte und -Knoten.

Beide Gruppen:
Vervollständigen Sie das Skript `main.m`, in dem die Symmsche-Integralgleichung gelöst wird.
Versuchen sie auch den Code der Funktionen `showSolDom` und `plotArclengthP` zu verstehen.

Zusatzaufgabe
Zeigen Sie: Falls $\Gamma = [-1, 1] \times \{0\}$ uniform trianguliert wird, d.h. $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N T_i$, $T_i = [(i-1) \cdot 2/N, i \cdot 2/N]$ so ist die Galerkin Matrix für das Einfachschichtpotential bei stückweise konstanten Ansatzfunktionen eine symmetrische Toeplitz-Matrix.