Prof. Dr. Karsten Urban
Kristina Steih

SS 2012
18.04.2012

NumPDE II - Blatt 2

Wir betrachten wieder den Heizblock von Blatt 1, also das folgende Problem (in schwacher Formulierung):

Bestimme $u \in X := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_{\text{top}}} = 0\}$ mit

$$a(u, v; \mu) = f(v), \quad v \in X,$$

wobei $a(u, v; \mu) := \sum_{q=1}^{2} \mu_q \, a_q(u, v)$ mit $a_q(u, v) := \int_{\Omega_q} \nabla u \cdot \nabla v$ und $f(v) := \int_{\Gamma_{\text{bottom}}} v$.

Laden Sie das Material von der Homepage herunter.

Aufgabe 1 *(Modularisierung)*

In Zeilen 1-59 im Skript *blatt2.m* werden im Wesentlichen wie auf Blatt 1 die Matrizen vorassembliert und dann zusammengesetzt, um das Problem für ein $\mu \in \mathcal{D}$ zu lösen (und verschiedene Zeitvergleiche durchzuführen). Machen Sie sich mit der neu eingeführten struct `prob` und den verwendeten Funktionen vertraut.

- Wie werden die Parameter-Funktionen $\Theta(\mu)^q$ behandelt? Wie werden die affinen Strukturen gespeichert?
  (*Hinweis:* Betrachten Sie `prob.fem.pre`, welches in der Funktion `performPreAssembling` angelegt wird)
- Ergänzen Sie die fehlenden Zeilen in der Funktion `assembleFemPre`, in der die vollen parameter-abhängigen Strukturen wieder zusammengesetzt werden sollen.

Aufgabe 2 *(Koerzivitäts- und inf-sup-Konstanten)*

a) Schreiben Sie eine Funktion `getCoercivity` zur Bestimmung der Koerzivitätskonstanten einer Bilinearform $a(u, v; \mu)$, d.h.

$$\alpha(\mu) := \inf_{v \in X} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|_X^2}.$$

b) Schreiben Sie eine Funktion `getInfSup` zur Bestimmung der inf-sup-Konstanten einer Bilinearform $a(u, v; \mu)$, d.h.

$$\beta(\mu) := \inf_{u \in X} \sup_{v \in X} \frac{a(u, v; \mu)}{\|u\|_X \|v\|_X}.$$

Stellen Sie dazu zunächst jeweils die verallgemeinerten Eigenwertprobleme auf. Informieren Sie sich über den Matlab-Befehl `eigs` und verwenden Sie zum Aufstellen der jeweiligen Matrizen die vorassemblierten Strukturen.

Aufgabe 3 *(Energienorm)*

In der Anwendung betrachtet man öfters die sogenannte Energienorm (und das erzeugende innere Produkt)

$$\begin{aligned} (((w,v)))_\mu &:= a(w,v;\mu) \quad \forall\, w,v \in X, \\ |||\, w \,|||_\mu &= \sqrt{a(w,w;\mu)} \quad \forall\, w \in X. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine koerzive und stetige Bilinearform $a(\cdot,\cdot;\mu)$ die Energienorm $|||\cdot|||_\mu$ äquivalent zur Norm $||\cdot||_X$ ist.

Um eine parameter-unabhängige Norm zu erhalten, verwendet man die Energienorm normalerweise mit einem fixierten Parameter $\bar{\mu}$. Modifizieren Sie Ihren Code so, dass Sie die Norm $|||\, w \,|||_{\bar{\mu}}$ mit $\bar{\mu} = (1,1)^T$ in Aufgabe 2 verwenden.