

NumPDE II - Blatt 3

Wir betrachten diesmal eine erste reduzierte Basis für den Heizblock von Blatt 1: einen niedrig-dimensionalen POD-Raum.

Vorbereitung:

Eine allgemeine Formulierung für das (diskrete) POD-Problem lautet:

Gegeben Snapshots $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^N$ mit $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\text{span}\{y_1, \dots, y_n\}) = d$, finde $N \leq d$ (Basis-)Vektoren $\{\chi_1, \dots, \chi_N\}$ mit $(\chi_i, \chi_j)_X = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, und

$$\{\chi_1, \dots, \chi_N\} = \underset{\substack{\{\psi_1, \dots, \psi_N\}, \\ (\psi_i, \psi_j)_X = \delta_{ij}}}{\text{arginf}} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| y_j - \sum_{i=1}^N (y_j, \psi_i)_X \psi_i \right\|_X^2}_{=: J(\psi_1, \dots, \psi_N)}.$$

- Machen Sie sich den Zusammenhang zu Definition (5.1) klar.
- Welche Schritte müssen für die Konstruktion einer POD-Basis durchgeführt werden?

Laden Sie das Material von der Homepage herunter.

Aufgabe 1 (Berechnung einer POD-Basis)

Bestimmen Sie für das Heizblock-Problem eine POD-Basis. Verwenden Sie als Ξ_{train} dabei eine log-äquidistante Diskretisierung für $\mathcal{D} := [0.01, 100]$ mit z.B. $n_{\text{train}} = 129$ Stützstellen. Was für eine Basis-Dimension N ist dabei sinnvoll?

Verifizieren Sie numerisch Lemma 5.3, also $\bar{\varepsilon}_N^{\text{POD}} := \sqrt{J(\chi_1, \dots, \chi_N)} = \sqrt{\sum_{i=N+1}^d \lambda_i}$ für alle $1 \leq N \leq d$.

Hinweis: Sie können zur Berechnung die Beziehung $\text{trace}(C) = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ verwenden.

Aufgabe 2 (Globale Approximationsgüte bei Projektion)

Visualisieren Sie die Fehlerfunktion $\mu \mapsto \|u^{\mathcal{N}}(\mu) - u_{N, \text{proj}}^{\text{POD}}(\mu)\|_X$ für alle $\mu \in \Xi_{\text{train}}$ und alle $1 \leq N \leq d$, wobei

$$u_{N, \text{proj}}^{\text{POD}}(\mu) = \sum_{i=1}^N (u(\mu), \chi_i)_X \chi_i$$

die Projektion von $u(\mu)$ in den N -dimensionalen POD-Raum ist.

Aufgabe 3 (Abhängigkeit von n_{train})

Untersuchen Sie die Abhängigkeit des POD-Fehlers $\bar{\varepsilon}_N^{\text{POD}}$ von der Anzahl n_{train} der Snapshots. Wählen Sie dabei z.B. $n_{\text{train}} = 2^{j+1}$, $j = 1, \dots, 7$. Was bedeutet dies für den Aufwand der Berechnung einer POD-Basis?