Prof. Dr. Karsten Urban
Kristina Steih

SS 2012
09.05.2012

NumPDE II - Blatt 4

Heute benutzen wir die POD-Basis von Blatt 3, um tatsächlich eine erste RB-Lösung $u_N(\mu)$ zu bestimmen und den zugehörigen Fehlerschätzer zu berechnen.

Laden Sie das Material von der Homepage herunter.

Aufgabe 1 *(Energienorm)*

In der Anwendung betrachtet man öfters die sogenannte Energienorm (und das erzeugende innere Produkt)

$$\begin{aligned} (((w,v)))_\mu &:= a(w,v;\mu) \quad \forall\, w,v \in X, \\ |||\, w \,|||_\mu &= \sqrt{a(w,w;\mu)} \quad \forall\, w \in X. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine koerzive und stetige Bilinearform $a(\cdot,\cdot;\mu)$ die Energienorm $|||\cdot|||_\mu$ äquivalent zur Norm $||\cdot||_X$ ist.

Um eine parameter-unabhängige Norm zu erhalten, verwendet man die Energienorm normalerweise mit einem fixierten Parameter $\bar{\mu}$. Berechnen Sie $\alpha(\mu)$ für $\mu \in \mathcal{D}$ sowohl bezüglich der H^1-Norm als auch bezüglich der Energie-Norm mit $\bar{\mu} = (1,1)^T$.

Aufgabe 2 *(Berechnung einer RB-Lösung $u_N(\mu)$)*

Die RB-Approximation $u_N(\mu) \in X_N := \operatorname{span}\{\psi_1,\ldots,\psi_N\}$ ist ja gerade die N-dimensionale Lösung des RB-Galerkin-Problems

$$\text{Finde } \; u_N(\mu) \in X_N : \qquad a(u_N(\mu), v;\mu) = f(v;\mu) \qquad \forall\, v \in X_N. \tag{1}$$

Zur Lösung dieser Gleichung nutzen wir die affinen Strukturen

$$a(u,v;\mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_a^q(\mu) a^q(u,v), \qquad f(v;\mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_f^q(\mu) f^q(v)$$

durch eine offline-online Zerlegung aus, indem wir die Matrizen und Vektoren

$$\mathbb{A}^q := \left(a^q(\psi_i,\psi_j)\right)_{i,j=1,\ldots,N}^T, \qquad \mathbb{F}^q := \left(f^q(\psi_j)\right)_{j=1,\ldots,N}$$

für unsere POD-Basis von Blatt 3 vorberechnen.

a) Wieso ist dies sinnvoll? *(Hinweis: Wie kann das Problem (??) dann online aufgestellt werden?)*

b) Ergänzen Sie die Funktion `computePODBasis`, um $\mathbb{A}^q$, $\mathbb{F}^q$ in den ensprechenden Strukturen `prob.POD.pre.lhs` bzw. `prob.POD.pre.rhs` zu speichern.

c) Ergänzen Sie die Funktion `computePODAppr`, um eine l-dimensionale RB-Lösung für $l \leq N$ berechnen zu können.

Aufgabe 3 *(Fehlerschätzer)*

Einer der größten Vorteile der RBM ist die Existenz von a-posteriori Fehlerschätzern.

a) Zeigen Sie, dass für eine koerzive Bilinearform $a(\cdot,\cdot;\mu) : X^{\mathcal{N}} \times X^{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\|u^{\mathcal{N}}(\mu) - u_N(\mu)\|_X =: \|e_N(\mu)\|_X \leq \Delta_N(\mu) := \frac{\|r_N(\cdot;\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)}.$$

Hierbei ist $r_N(\cdot;\mu) : X^{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$, $r_N(v) = f(v) - a(u_N(\mu), v; \mu)$ das Residuum.

b) Zeigen Sie, dass die Dualnorm $\|r_N(\cdot;\mu)\|_{X'}$ über die Norm des Riesz-Repräsentanten berechnet werden kann:

$$\|r_N(\cdot;\mu)\|_{X'} = \|\hat{r}_N(\mu)\|_X, \qquad \text{falls gilt:} \quad (\hat{r}_N(\mu), v)_X = r_N(v) \qquad \forall\, v \in X^{\mathcal{N}}.$$

(Hier wollen wir uns (noch) nicht um eine offline-online-Zerlegung für den Fehlerschätzer kümmern.)

c) Implementieren Sie eine Funktion `getErrEst`, welche den Fehlerschätzer $\Delta_N(\mu)$ berechnet.

d) Vergleichen Sie für zufällige Test-Parameter $\mu \in \Xi_{\text{test}} \subset \mathcal{D}$ den Fehler $\|e_N(\mu)\|_X$ mit dem Fehlerschätzer.

Aufgabe 4 *($\alpha_{LB}(\mu)$: Min-Θ Ansatz)*

Als ein erster Schritt zur offline-online-Zerlegung des Fehlerschätzers kümmern wir uns hier zunächst einmal um eine berechenbare untere Schranke $\alpha_{LB}(\mu)$ für die Koerzivitätskonstante $\alpha(\mu)$. Implementieren Sie eine Funktion `getAlpha_LB(mu, prob)`, welche die Min-Θ-Abschätzung (Formel (6.6) im Skript) zurückgibt.
Vergleichen Sie diese untere Schranke mit den Werten für $\alpha(\mu)$ aus Aufgabe 1, sowie einen Fehlerschätzer `getErrEst2`, welcher α_{LB} anstelle von α verwendet, mit der Fehlerschranke aus Aufgabe 2.