Prof. Dr. Karsten Urban SS 2012
Kristina Steih 13.06.2012

NumPDE II - Blatt 7

Bis jetzt war unser Problem immer in affiner Form gegeben. Falls dies nicht der Fall ist, muss zunächst eine Approximation der nicht-affinen Bilinear- bzw. Linearformen berechnet werden. Genau dies leistet die *Empirical Interpolation Method* (EIM).

Völlig unabhängig von irgendeiner PDE ist die EIM zunächst für skalarwertige Funktionen $g : \bar{\Omega} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definiert. Wir betrachten hier die Funktion aus dem Originalpaper[1]

$$g(x;\mu) := \frac{1}{\sqrt{(x_1-\mu_1)^2 + (x_2-\mu_2)^2}}, \qquad x \in \bar{\Omega} := [0,1]^2, \mu \in \mathcal{D} := [-1,-0.01]^2.$$

Vorbereitung:

Der wesentliche Eingangsparameter in den EIM-Algorithmus ist die Menge G, also die Menge der Funktionen, für die die EIM durchgeführt werden soll, d.h.

$$G := \{g : \bar{\Omega} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}, (x,\mu) \mapsto g(x,\mu)\}.$$

Um den Algorithmus numerisch umsetzen zu können, müssen wir uns aber auf endliche Mengen $\bar{\Omega}_h \times \Xi_{\text{train}} \subset \bar{\Omega} \times \mathcal{D}$ beschränken. Wir verwenden also

$$G_h := \{g_h(\cdot;\mu_i) : \mu_i \in \Xi_{\text{train}}\} \quad \text{mit } g_h(\underline{x};\mu) = (g(x_1;\mu),\ldots,g(x_{\mathcal{N}};\mu))^T, \ \underline{x} \in \bar{\Omega}_h.$$

In unserem Fall besteht $\bar{\Omega}_h$ gerade aus den Knotenpunkten in unserem Mesh über Ω.

Betrachten Sie die Zeilen 1-24 in `blatt7.m` und die Funktion `performEmpInt`. Was steht in der Matrix G?

Aufgabe 1 *(EIM)*

Implementieren Sie die Funktion `empIntAlg`, welche die EIM für eine Eingangsmatrix G durchführen soll.

Dabei wird der Algorithmus normalerweise abgebrochen, wenn der EIM-Fehler

$$\varepsilon_Q^* := \max_{g \in G} \|g - I_Q g\|_\infty$$

unter eine vorgegebene Toleranz *tol* fällt.

Aufgabe 2 *(Fehlerschätzer EIM-Interpolation)*

Schreiben Sie eine Funktion `getEIMCoeffs`, welche online für ein gegebenes $\mu \in \mathcal{D}$ die Koeffizienten der Approximation $I_Q g$ und den zugehörigen Fehlerschätzer $\Delta_{Q,Q',\infty}(g)$ aus Satz 10.15 berechnet. Wählen Sie dazu $Q' = Q + 1$.

[1] M. Barrault, Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T. Patera. *An 'empirical interpolation' method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations.* Comptes Rendus Mathematique, 339(9), 667 – 672 (2004).