Prof. Dr. Karsten Urban
Kristina Steih

SS 2012
20.06.2012

# NumPDE II - Blatt 8

Auf Blatt 7 haben wir eine EIM-Approximation $I_Q(g(\cdot;\mu))(x) := \sum_{q=1}^{Q} \theta_g^q(\mu) g_q(x)$ der Funktion

$$g(x;\mu) := \frac{1}{\sqrt{(x_1-\mu_1)^2 + (x_2-\mu_2)^2}}, \qquad x \in \bar{\Omega} := [0,1]^2, \mu \in \mathcal{D} := [-1,-0.01]^2$$

berechnet.

Jetzt soll dies in den RB-Kontext eingebaut werden. Dazu betrachten wir das Problem aus Barrault et al.[1]: Für $\mu \in \mathcal{D}$ bestimme $u(\mu) \in X := H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v;\mu) \qquad \forall\, v \in X,$$

wobei

$$a(u(\mu), v; \mu) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega g(\cdot;\mu) uv, \qquad f(v;\mu) := \int_\Omega g(\cdot;\mu) v.$$

**Aufgabe 1** *(EIM-Approximation des Problems)*

Wir erhalten eine affine Zerlegung unseres Problems, indem wir $g$ durch $I_Q g$ ersetzen, also das folgende Problem betrachten: Für $\mu \in \mathcal{D}$ bestimme $u^Q(\mu) \in X^{\mathcal{N}}$ mit

$$a^Q(u^Q(\mu), v; \mu) = f^Q(v;\mu) \qquad \forall\, v \in X^{\mathcal{N}},$$

wobei

$$a^Q(u(\mu), v; \mu) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \sum_{q=1}^{Q} \theta_g^q(\mu) \int_\Omega g_q(\cdot)\, uv, \qquad f^Q(v;\mu) := \sum_{q=1}^{Q} \theta_g^q(\mu) \int_\Omega g_q(\cdot)\, v.$$

Damit Comsol die parameter-unabhängigen Formen $\int_\Omega g_q(\cdot)\, uv$ bzw. $\int_\Omega g_q(\cdot)\, v$ vorassemblieren kann, muss eine Funktion `g(x1,x2,...,q)` zur Verfügung gestellt werden, welche an beliebigen Stellen $x = (x_1, x_2)^T \in \Omega$ den Wert von $g_q(x)$ zurückgibt. Da die EIM-Approximation allerdings nur $g_q(x_h)$, $x_h \in \Omega_h$ zurückgibt, müssen die Funktionswerte an den Zwischenstellen aus der EIM-Basis konstruiert werden.

Eine Möglichkeit ist, die für $\widetilde{q}_q(x_h)$ durchgeführte Normalisierung zur Transformation in die Basisfunktion $g_q$ zu wiederholen, d.h. für $x \neq x_h$ jeweils die Residuen $r_q(x)$ und $g_q(x) = \frac{r_q(x)}{r_q(x_q)}$ zu berechnen. Dazu ist es sinnvoll, bei der EIM-Basis-Konstruktion nicht nur die Matrix $\underline{G_Q}$ der normalisierten Basisfunktionen an den Interpolationspunkten zu speichern, sondern auch $\Xi_T := (\tilde{q}_j(x_i))_{i,j=1,\ldots,Q}$.

Ergänzen Sie die notwendigen Berechnungen in der Funktion `g` und berechnen Sie in `blatt8` den Fehler

$$\|u(\mu) - u^Q(\mu)\|_X$$

in Abhängigkeit von $Q$.

[1] M. Barrault, Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T. Patera. *An 'empirical interpolation' method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations.* Comptes Rendus Mathematique, 339(9), 667 – 672 (2004).

**Aufgabe 2** *(RB-EIM-Approximation)*

Jetzt soll für unser nun affines Problem wieder eine RB-Basis erstellt werden, d.h. es soll ein RB-Raum $X^N$ konstruiert werden, auf dem das folgende reduzierte Problem gelöst wird: Für $\mu \in \mathcal{D}$ bestimme $u^{N,Q}(\mu) \in X^N$ mit

$$a^Q(u^{N,Q}(\mu), v; \mu) = f^Q(v; \mu) \qquad \forall\, v \in X^N.$$

Gleichzeitig wollen wir uns auch noch eine primal-duale Approximation des linearen Outputs

$$s(\mu) := \int_\Omega u(\mu)$$

betrachten.

a) Ein Problem ist es nun, immer die richtigen parameter-abhängigen (EIM-)Koeffizienten der Bilinear- und Linearformen zu bekommen. Außerdem muss damit umgegangen werden, dass zur Fehlerschätzung zusätzliche EIM-Basisfunktionen berechnet worden sind. Machen Sie sich mit den größtenteils leicht umgestellen Strukturen und Funktionen vertraut:

- Was liefern die Funktionen `prob.state.theta` bzw. `prob.adjoint.theta` zurück?
- Wie viele Terme stehen in den FEM-Speicherstrukturen (z.B. `prob.state.fem.pre.lhs`)? Wie viele in den reduzierten Strukturen (z.B. `prob.state.RB.pre.lhs`)? Was ist `prob.EIM.Qmax` und wie lang sind die von der Funktion `getEIMCoeffs` zurückgegebenen Koeffizienten-Vektoren? Warum?

b) Ergänzen Sie die Funktion `getErrEst_RB`, die den Fehlerschätzer $\Delta_{N,Q}(\mu)$ (10.18) zurückgeben soll.

c) Was beobachten Sie für den Fehler $\|u(\mu) - u^{N,Q}(\mu)\|_X$ in Abhängigkeit von $N$ und $Q$? Was bedeutet das für die benötigte Genauigkeit der EIM-Approximation?

d) Was beobachten Sie für den Output-Fehler $|s(\mu) - s^{Qmax,N,\widetilde{N}}|$ ?