Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Matlab-Blatt 1

(Abgabe bis spätestens Mittwoch, 09.05.2012 um 8 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 1 *(Fixpunkt-, Sekanten- und Newtonverfahren)* (12 Punkte)

Eine Kugel mit Radius $R = 1$ und Dichte $\rho \in (0, 1)$ schwimmt im Wasser (Dichte des Wassers $\rho_W = 1$). Gesucht ist die Eintauchtiefe $h = h(\rho)$ dieser Kugel. Man kann zeigen, dass im Kräftegleichgewicht

$$h^3 - 3h^2 + 4\rho = 0$$

gilt. Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe

- der Fixpunktiteration $h_{k+1} = \sqrt{(h_k^3 + 4\rho)/3}$,
- des Sekantenverfahrens
- des Newtonverfahrens

für $\rho = 0.0001, 0.05, 0.4, 0.6, 0.95, 0.9999$. Implementieren Sie dazu die Verfahren in Matlab. Verwenden Sie $h_0 = R$ als Startwert. Beenden Sie die Iteration, sobald $|h_k - h_{k-1}| \leq 10^{-5}$, spätestens aber bei $k = 10^4$. Erklären Sie das unterschiedliche Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von ρ. Lassen Sie sich dazu jeweils die Anzahl der durchgeführten Iterationen ausgeben.

Aufgabe 2 *(Modified Newton method)* (6+6 Punkte)

For the solution of the non-linear system of equations $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (with $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), the following iterative method can be used:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k)} + D\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k)} - D\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(k)}),
\end{aligned}$$

where $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the Jacobian matrix of $\mathbf{F}$ evaluated in the point $\mathbf{x}$.

a) Implement a Matlab function `function x1 = ModNewtStep( x0, F, DF )` that computes a step of this iterative method for a scalar function $\mathbf{F}$, that is, for the case $n = 1$. Here `F` is a handle to the function $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and `DF` a handle to its derivative $F' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) What is the order of convergence of the method? To investigate it, write a Matlab routine `function ModNewtOrder` that

- uses the function `ModNewtStep` from subtask a) in order to apply the iterative method to the following scalar equation
$$\arctan(x) - 0.123 = 0;$$
- determines empirically the order of convergence;
- plots the error committed by the method against the number of iterations used, and saves the picture in `ModNewtOrder.eps`.

Use $x_0 = 5$ as initial guess.

Hint 1: the "exact" solution is $x = 0.123624065869274$.
Hint 2: remember that $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 3 *(LaTeX)* (6 Punkte)

Erstellen Sie mit LaTeX ein PDF-Dokument, welches sowohl ihre Programm-Codes aus Aufgabe 1 und 2 als auch die zugehörigen Ergebnisse bzw. Ausgaben enthält.

Alle Programme müssen im Kommentar mit Namen und Datum versehen werden, und werden nur so akzeptiert. Funktionen/Skripte benötigen eine kurze Beschreibung ihres Zwecks, der Eingabe- und Ausgabewerte. Plots müssen klar lesbar mit Titel, Achsenbeschriftungen, bei mehreren Kurven auch mit Legenden versehen werden. Alle Matlab-relevanten Dateien geben Sie bitte ausschliesslich online ab:
Senden Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen , PDF-File) in EIN zip-File verpackt in einer Email mit dem Betreff `Num2-BlattM1` an iris.haecker@uni-ulm.de. Aus der Email sollte klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.