Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Matlab-Blatt 2

(Abgabe bis spätestens Mittwoch, 23.05.2012 um 8 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 4 *(Minimierung mit Newton)* (12 Punkte)

Die durch

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt Rosenbrock-Funktion. Diese Funktion wird häufig dazu verwendet, Verfahren für unrestringierte Optimierungsaufgaben zu testen.

a) Um zu verstehen, was mit dem Rosenbrock'schen Tal gemeint ist, plotten Sie die Rosenbrock-Funktion f auf den Intervallen $[-10,10]\times[-10,10]$, $[-2,2]\times[-2,2]$, $[-1.5,1.5]\times[-0.5,2]$ und $[-0.75,0.75]\times[-0.25,1]$ jeweils als 3D Plot in Matlab.
Hinweis: Matlab-Befehle `meshgrid` und `surf`.

b) Erzeugen Sie einen Höhenlinienplot der Rosenbrock-Funktion f für $(x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]$. Da man den kritischen Bereich in diesem Bild schlecht erkennt, wollen wir anpassen, für welche Niveaus Höhenlinien gezeichnet werden. Verwenden Sie die Hilfe um herauszufinden, wie man dies erreichen kann, und plotten Sie die Höhenlinien zu den Niveaus `logspace(-3,10,100)`. Jetzt kann man den kritischen Bereich erkennen, die Höhenlinien liegen aber teilweise beinahe aufeinander. Erzeugen Sie einen Vektor mit Niveaus so, dass durch jeden Punkt

$$(x,y)\in\Omega := \left\{(0+jh_1, -2+jh_2) \mid j=1,2,\dots,50,\ h_1=\frac{14}{500}, h_2=\frac{4}{50}\right\}$$

eine Höhenlinie verläuft.
Hinweis: Matlab-Befehl `contour`.

c) Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$f(x,y)\to\min,$$

indem Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Nullstelle von

$$0 = f(x,y) := \nabla f(x,y)$$

bestimmen. Wählen Sie als Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = (-1,1)^T$ und als Abbruchkriterium

$$\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 < tol,$$

mit der Toleranz $tol = 10^{-4}$. Plotten Sie die Iterierten $\mathbf{x}^{(k)}$, $k=0,1,\dots$ in den unter b) erzeugten Graphen.

Aufgabe 5 *(Julia Set)* (12 Punkte)

Julia sets are famous fractal shapes in the complex plane. They are constructed from the basins of attraction of zeros of complex functions when the Newton method is applied to find them.

In the space $\mathbb{C}$ of complex numbers the equation

$$z^3 = 1$$

has three solutions: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ (the cubic roots of unity).

As you know from the analysis course, the complex plane $\mathbb{C}$ can be identified with $\mathbb{R}^2$ and using this idendification this equation can be converted into a system of equations $\mathbf{F}(x,y)=\mathbf{0}$ for a suitable function $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Using the formulation of the Newton iteration for the non-linear iteration $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ with $\mathbf{x}=(x,y)^T$ from exercise sheet number 2, denote by $\mathbf{x}^{(k)}$ the iterates produced by the Newton method with some initial vector $\mathbf{x}^{(0)}\in\mathbb{R}^2$. Depending on $\mathbf{x}^{(0)}$ this sequence will either diverge or converge to one of the three cubic roots of unity.

Analyze the behaviour of the Newton iterates using the following procedure:

- use equally spaced points (e.g. 200×200 points gives a "nice" picture) on the domain $[-2, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$ as starting points of the Newton iterations,
- color the starting points differently depending on which of the three roots is the limit of the sequence $\mathbf{x}^{(k)}$.

Hint: useful Matlab commands: `pcolor, colormap, shading, caxis`. You may stop the iteration once you are closer in distance to one of the third roots of unity than 10^{-4}.

The three (not connected) sets of points whose iterations are converging to the different z_i are called Fatou domains, their boundaries are the Julia sets.

Aufgabe 6 *(LaTeX)* (6 Punkte)

Erstellen Sie mit LaTeX ein PDF-Dokument, welches sowohl ihre Programm-Codes aus Aufgabe 4 und 5 als auch die zugehörigen Ergebnisse bzw. Ausgaben enthält.

Verpacken Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen , PDF-File) in EIN zip-File und benennen Sie dieses

`student1_student2.zip`

Senden Sie dieses nun in einer Email mit dem Betreff

`Num2-BlattM2`

an iris.haecker@uni-ulm.de. Aus der Email sollte klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.