Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Matlab-Blatt 3

(Abgabe bis spätestens Mittwoch, 06.06.2012 um 8 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 7 *(Nullstellen der Legendre-Polynome)* (12 Punkte)

Für die i-te Nullstelle x_i^* des Legendre-Polynoms $P_n(x)$ gilt folgende asymptotische Entwicklung von Francesco Tricomi:

$$x_i = \left(1 - \frac{n-1}{8n^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4n+2}\pi\right) + \mathcal{O}(n^{-4}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Schreiben Sie eine Matlabfunktion `function LegendreNST(n)`, die alle n Nullstellen des Legendrepolynoms P_n mit dem

a) Bisektionsverfahren,

b) Newton-Verfahren,

c) folgenden Halley-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

bestimmt. Als Startwerte für das Newton- und das Halley-Verfahren können Sie obige asymptotische Entwicklung verwenden, bzw. bei der Bisektion für die i-te Nullstelle das Startintervall

$$[\tilde{x}_i - 0.1, \tilde{x}_i + 0.1], \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_i = \left(1 - \frac{n-1}{8n^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4n+2}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wählen Sie als Abbruchbedingung jeweils

$$P_n(x_k) < eps,$$

und lassen Sie sich zu jedem Startwert die Anzahl der benötigten Iterationen sowie die letzte Iterierte ausgeben. Zur Kontrolle sind die Nullstellen der ersten Legendre-Polynome P_n in Tabelle 1 angegeben (Für die Nullstellen von $p \in \mathbb{P}_n$ existieren für $n > 4$ keine geschlossenen Ausdrücke).

Bemerkung 1: Für glattes f mit einer einfachen Nullstelle in x^* konvergiert das Halley-Verfahren lokal kubisch.

Hinweis 1: Für die Legendre-Polynome gilt $(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.

$n=1$	0	
$n=2$	±0.5773502692	$=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$n=3$	0	
	±0.7745966692	$=\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$
$n=4$	±0.3399810436	$=\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$
	±0.8611363116	$=\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$
$n=5$	0	
	±0.5384693101	
	±0.9061798459	
$n=6$	±0.2386191861	
	±0.6612093865	
	±0.9324695142	

Tabelle 1: Nullstellen der ersten Legendre-Polynome P_n

Aufgabe 8 *(Gaussian quadrature)* (12 Punkte)

Given a smooth, odd function $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, consider the integral

$$I(f) := \int_{-1}^{1} \arcsin(t)\, f(t)\, dt. \qquad (*)$$

We want to approximate this integral using Gauss-Legendre quadrature. The nodes (vector `x`) and the weights (vector `w`) of n-point Gaussian quadrature on $[-1, 1]$ can be computed using the provided Matlab routine `[x,w]=gaussquad(n)` (in the file `gaussquad.m`).

a) Write a Matlab routine

```
function GaussConv(f_hd)
```

that produces an appropriate convergence plot of the quadrature error versus the number $n = 1, \dots, 50$ of quadrature points. Here, `f_hd` is a handle to the function f.

Save your convergence plot for $f(t) = \sinh(t)$ as `GaussConv.eps`.

Hint 1: use the Matlab command `quad` with tolerance `eps` to compute a reference value of the integral.

Hint 2: if you cannot implement the quadrature formula, you can resort to the Matlab function

```
function I = GaussArcSin(f_hd,n)
```

provided in implemented `GaussArcSin.p` that computes n-points Gauss quadrature for the integral $(*)$. Again `f_hd` is a function handle to f.

b) Which kind of convergence do you observe?

c) Transform the integral $(*)$ into an equivalent one with a suitable change of variable so that Gauss quadrature applied to the transformed integral converges much faster.

d) Now, write a Matlab routine

```
function GaussConvCV(f_hd)
```

which plots the quadrature error versus the number $n = 1, \dots, 50$ of quadrature points for the integral obtained in the previous subtask.

Again, choose $f(t) = \sinh(t)$ and save your convergence plot as `GaussConvCV.eps`.

Hint 3: In case you could not find the transformation, you may rely on the function

```
function I = GaussArcSinCV(f_hd,n)
```

implemented in `GaussArcSinCV.p` that applies n-points Gauss quadrature to the transformed problem.

e) Which kind of convergence is achieved? Explain the difference between the results obtained in subtasks a) and d).

Aufgabe 9 *(LaTeX)* (6 Punkte)

Erstellen Sie mit LaTeX ein PDF-Dokument, welches sowohl ihre Programm-Codes aus Aufgabe 7 und 8 als auch die zugehörigen Ergebnisse bzw. Ausgaben enthält.

Verpacken Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen , PDF-File) in EIN zip-File und benennen Sie dieses

`student1_student2.zip`

Senden Sie dieses nun in einer Email mit dem Betreff

`Num2-BlattM3`

an iris.haecker@uni-ulm.de. Aus der Email sollte klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.