Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Matlab-Blatt 4

(Abgabe bis spätestens Mittwoch, 20.06.2012 um 8 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 10 *(Zweidimensionale Gauss-Quadratur)* (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

gegeben. Berechnen Sie eine Approximation für $I(f)$ mittels

$$I(f) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy \;\approx\; \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\alpha_j f(x_i,y_j) =: Q^{(n)}$$

mit einer zweidimensionalen Gauss-Quadratur $Q^{(n)}$. Um $Q^{(n)}$ zu berechnen, verwenden Sie die gleiche eindimensionale Gaussregel in x und y und werten für jedes y_j die Gaussregel in x-Richtung aus.

a) Schreiben Sie dazu eine Matlab-Funktion `integrate2D`, die als Argument den Parameter n entgegennimmt, wobei die Anzahl der Knoten $x_0,\dots,x_n$ in einer Dimension wie üblich $n+1$ ist, und als Ergebnis den Näherungswert von $I(f)$ liefert. Verwenden Sie zur Bestimmung der Knoten und Gewichte der Gauss-Quadratur in einer Dimension die auf der Vorlesungshomepage bereitgestellte Funktion `gaussQuad`.

b) Plotten Sie den relativen Fehler des Quadraturergebnisses für $n = 1,\dots,19$ einfachlogarithmisch gegen n. Als Referenzlösung können Sie das Quadraturergebnis für $n = 20$ verwenden. Wie hängt der Fehler von n ab und wie von der Anzahl insgesamt verwendeter Knoten $N = n^2$?

Aufgabe 11 *(Newton-Interpolation)* (16 Punkte)

a) Implementieren Sie ein Programm, das die Newton-Interpolation für gegebene Stützstellen und zugehörige Stützwerte durchführt. Schreiben Sie dazu zunächst eine Matlabfunktion

   `[p] = newton(x,y)`,

   die aus gegebenen Stützstellen $x = (x_0,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ und zugehörigen Funktionswerten $y = (f_0,\dots,f_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Newton-Koeffizienten $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

   $$p_0 = [x_0]f, \quad p_1 = [x_0,x_1]f, \quad \dots, \quad p_n = [x_0,\dots,x_n]f$$

   über das Dividierte-Differenzen-Schema berechnet und zurückgibt. Implementieren Sie dann eine Matlab-Funktion

   `[wert] = newton_auswertung(x,p,w)`,

   die für ein gegebenes Newton-Interpolationspolynom P_n an der Stelle w den Funktionswert $P_n(w)$ bestimmt und zurückgibt. Dabei werde das Polynom P_n durch die Newton-Koeffizienten p und die Stützstellen x definiert.

b) Verändern Sie die Funktion `newton_auswertung` in einer neuen Funktion

   `[wert] = newton_horner(x,p,w)`

   so, dass zur Auswertung der Polynome folgendes Horner-artige Schema verwendet wird:
   Für die dividierten Differenzen $d_k := [x_0,\dots,x_k]f$, $k = 0,\dots,n$ setze $p := d_n$; für $k = n-1, n-2, \dots, 0$ berechne

   $$p = p(x - x_k) + d_k,$$

   was schließlich $p = P(f|x_0,\dots,x_n)(x)$ ergibt.

c) Testen Sie ihr Programm für die Funktion

   $$f(x) = e^x$$

   und Stützstellen $-1,\dots,1$. Vergleichen Sie das resultierende Interpolationspolynom mit der Funktion f in einem Plot.

d) Testen Sie nun Ihr Programm für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

und Stützstellen $-1, \dots, 1$. Vergleichen Sie das resultierende Interpolationspolynom mit der Funktion f in einem Plot.

e) Ändern Sie Ihr Programm so ab, dass als Stützstellen die Nullstellen des Tschebycheff-Polynoms T_{n+1}, also

$$x_{k+1} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, \dots, n$$

verwendet werden. Anschliessend soll erneut das Interpolationspolynom mit der Funktion f durch einen Plot verglichen werden.

Aufgabe 12 *(LaTeX)* (6 Punkte)

Create a PDF-document with LaTeX containing all relevant programm source codes, corresponding results and plots for problems 10 and 11.

Verpacken Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen , PDF-File) in EIN zip-File und benennen Sie dieses

`student1_student2.zip`

Senden Sie dieses nun in einer Email mit dem Betreff

`Num2-BlattM4`

an iris.haecker@uni-ulm.de. Aus der Email sollte klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.