Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Matlab-Blatt 5

(Abgabe bis spätestens Mittwoch, 04.07.2012 um 8 Uhr per Mail (s.u.).)

Aufgabe 13 *(Evaluating the derivatives of interpolating polynomials)* (9 Punkte)

a) Write an efficient Matlab function

`dp = dipoleval(t,y,x),`

that returns the row vector $(p'(x_1), \dots, p'(x_m))$, when the argument `x` passes $(x_1, \dots, x_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Here, p' denotes the derivative of the polynomial $p \in \mathbb{P}_n$ interpolating the data points (t_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, for pairwise different $t_i \in \mathbb{R}$ and data values $y_i \in \mathbb{R}$.

Hint 1: Differentiate the recursion formula

$$p_i(t) \equiv y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$p_{i_0,\dots,i_m}(t) = \frac{(t - t_{i_0}) p_{i_1,\dots,i_m}(t) - (t - t_{i_m}) p_{i_0,\dots,i_{m-1}}(t)}{t_{i_m} - t_{i_0}}$$

for $\{i_0, \dots, i_m\} \subset \{0, \dots, n\}$, $0 \le m \le n$, where $p_{i_0,\dots,i_m}$ is the interpolation polynomial of degree m through $(t_{i_0}, y_{i_0}), \dots, (t_{i_m}, y_{i_m})$. Then devise an algorithm in the spirit of the Aitken-Neville algorithm

Listing 1: ANipoleval.m

```
function [ v ] = ANipoleval( t, y, x )

for i=1:length(y)
    for k=i-1:-1:1
        y(k) = y(k+1) + (x-t(i))/(t(i)-t(k))*(y(k+1)-y(k));
    end
end
v = y(1);

end
```

b) Verify the correctness of your implementation in a plot by using divided differences as comparison.

Hint 2: Matlab commands `rand` and `diff`.

Aufgabe 14 *(Kubische Splines)* (15 Punkte)

a) Implementieren Sie eine Routine

`function draw_cube_spline(nodes, coeff),`

die den durch das Gitter `nodes` $= [x_0, \dots, x_n]$ und die Koeffizienten `coeff` gegebenen Spline s sowie dessen erste, zweite und dritte Ableitung zeichnet. Dabei sei `coeff` ein Vektor der Länge $4n$ so, dass für $x \in [x_i, x_{i+1}]$ gilt

$$s(x) = \texttt{coeff}(4*i+1)x^3 + \texttt{coeff}(4*i+2)x^2 + \texttt{coeff}(4*i+3)x + \texttt{coeff}(4*i+4).$$

Kennzeichnen Sie insbesondere die Lage der Stützpaare.

b) Erstellen Sie eine Routine

`function coeff = s_4(nodes, values, ds0,ds1)`

welche die Koeffizienten `coeff` (siehe a)) eines kubischen Splines $s \in \mathcal{S}_{4,\Delta}$ berechnet. Dabei interpoliere s die durch `nodes` und `values` gegebenen Stützpaare. Die für die eindeutige Lösbarkeit notwendige zusätzlichen Bedingungen seien $s'(x_0) =$ `ds0` und $s'(x_n) =$ `ds1`.

c) Seien $n = 20$, $h = 10/n$, $x_i = -5 + ih$ und

$$f_i = 1/(1 + x_i^2), \quad i = 0, \dots, n.$$

Benutzen Sie Ihre Routinen, um den die Stützpaare (x_i, f_i) interpolierenden kubischen Spline s mit

$$s'(x_0) = s'(x_n) = 0$$

zu berechnen. Stellen Sie die Funktion f, den interpolierenden Spline s sowie jeweils die erste, zweite und dritte Ableitung dar.

d) Gegeben seien die Punkte

$$\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{p_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{p_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie ein Programm, das einen Plot des kubischen Splines

$$s : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad s(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ausgibt, welcher die Punkte $\overrightarrow{p_1}, \dots, \overrightarrow{p_5}$ durchläuft mit

$$s(0) = \overrightarrow{p_1},\ s(\frac{1}{4}) = \overrightarrow{p_2},\ s(\frac{1}{2}) = \overrightarrow{p_3},\ s(\frac{3}{4}) = \overrightarrow{p_4},\ s(1) = \overrightarrow{p_5}\,,$$

und der die Bedingungen

$$s'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie Ihr Programm aus Teilaufgabe b) für $z(t)$ und $y(t)$.

Aufgabe 15 *(LaTeX)* (6 Punkte)

Erstellen Sie mit LaTeX ein PDF-Dokument, welches sowohl ihre Programm-Codes aus Aufgabe 13 und 14 als auch die zugehörigen Ergebnisse bzw. Ausgaben enthält.

Verpacken Sie alle Dateien (m-Files, Plots, Erklärungen , PDF-File) in EIN zip-File und benennen Sie dieses

`student1_student2.zip`

Senden Sie dieses nun in einer Email mit dem Betreff

`Num2-BlattM5`

an iris.haecker@uni-ulm.de. Aus der Email sollte klar hervorgehen, von welchen beiden Studenten die Lösung ist. Bitte schreiben Sie außerdem dazu, in welcher Übungsgruppe (Wochentag und A bzw. B) Sie jeweils sind.