Lernziele

In diesem Praktikum sollen Sie üben und lernen:

- Grafische Veranschaulichung von Orthogonalpolynomen und ihren Nullstellen
- Implementierung von Quadraturformeln und ihre Fehleranalyse

Bevor Sie mit den Praktikumsaufgaben beginnen, laden Sie die Datei Session2.zip von der Internetseite

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2012/vorlesung-numerik-2.html`

herunter und entpacken Sie diese in einem eigenen Ordner.

Praktikumsaufgabe 10 - Orthogonalpolynome

Sie finden in Ihrem Ordner eine Funktion `ortho_pol`, die zu einer natürlichen Zahl n und einer Klasse (siehe Abbildung 1) die Koeffizienten ihrer ersten $n+1$ Orthogonalpolynome $p_0, p_1, \ldots, p_n$ und deren Nullstellen bestimmt. Dazu wird als Standardisierung die Normierung des führenden Koeffizienten gleich eins verwendet. Die Ausgabeform ist analog zu Abbildung 2, d. h. die Koeffizienten zu p_k sind im $(k+1)$-ten Vektor der Ausgabematrix gespeichert. Ähnliches gilt auch für die Nullstellen.

(i) Machen Sie sich zunächst mit dieser Funktion vertraut, indem Sie

```
[P,N]=ortho_pol(5,'tscheb')
```

ausführen und überprüfen, ob die Nullstellen von p_{k+1} die Nullstellen von p_k trennt (siehe Satz 2.1.22 im Skript). Vergleichen Sie die Koeffizienten der Polynome mit den Tschebyscheff-Polynomen aus einer anderen Quelle (z. B. Skript).

(ii) Schreiben Sie eine Funktion `pol_plot`, die zu m, n, (mit $m < n$) und `class` die entsprechenden Orthogonalpolynome $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$ mit einer geeigneten Standardisierung in einem geeigneten Intervall plottet und die Nullstellen mit kleinen Kreisen markiert. Aufruf: `pol_plot(m,n,class)`

Name	r	s	$\omega(x)$	σ_n
`'legendre'`	-1	1	1	n gerade: $\frac{2}{n+1}$, n ungerade: 0
`'log'`	0	1	$-\log(x)$	$\frac{1}{(n+1)^2}$
`'tscheb'`	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	n gerade: $\pi \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot n}$, n ungerade: 0
`'laguerre'`	0	∞	e^{-x}	$n!$
`'hermite'`	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	n gerade: $\Gamma(\frac{n+1}{2})$, n ungerade: 0

Abbildung 1: Tabelle 1

```
>> ortho_pol(5,'log')

ans =

    1.0000   -0.2500    0.0675   -0.0181    0.0048   -0.0013
         0    1.0000   -0.7143    0.3555   -0.1497    0.0570
         0         0    1.0000   -1.1998    0.8852   -0.5141
         0         0         0    1.0000   -1.6919    1.6613
         0         0         0         0    1.0000   -2.1869
         0         0         0         0         0    1.0000
```

Abbildung 2: Ausgabe Testbeispiel

Praktikumsaufgabe 11 - Quadraturgewichte

In der Vorlesung haben Sie die Formel

$$\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathsf{d}x = \omega_1^{(n)} q(x_1^{(n)}) + \ldots + \omega_n^{(n)} q(x_n^{(n)}) \tag{1}$$

für $q \in \mathbb{P}_{2n-1}$ und für die Nullstellen $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ des Orthogonalpolynoms p_n kennengelernt. Dabei bestimmt die Gewichtsfunktion $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Klasse, aus der p_n stammt. Nach Satz 2.1.21 gilt für die Gewichte

$$\omega_k^{(n)} = \frac{\int_a^b \omega(x) p_{n-1}^2\,\mathsf{d}x}{p_n'(x_k^{(n)}) p_{n-1}(x_k^{(n)})}\,.$$

Schreiben Sie eine Funktion `zps_weights`, die zu $n \in \mathbb{N}$ und zur entsprechenden Klasse die Nullstellen der Orthogonalpolynome $p_0, p_1, \ldots, p_n$ und die Gewichte $(\omega_k^{(j)})$ für $j = 1, \ldots, n$ als obere Dreiecksmatrix ausgibt. Hierfür dürfen Sie die Funktionen `scalar`, `derivative` und `ortho_pol` verwenden. Aufruf: `[N,W]=zps_weights(n,class)`

Testbeispiel:

```
>> [N,W]=zps_weights(5,'tscheb')

N =

         0   -0.7071   -0.8660   -0.9239   -0.9511
         0    0.7071         0   -0.3827   -0.5878
         0         0    0.8660    0.3827         0
         0         0         0    0.9239    0.5878
         0         0         0         0    0.9511


W =

    3.1416    1.5708    1.0472    0.7854    0.6283
         0    1.5708    1.0472    0.7854    0.6283
         0         0    1.0472    0.7854    0.6283
         0         0         0    0.7854    0.6283
         0         0         0         0    0.6283
```

Praktikumsaufgabe 12 - Quadratur

Ersetzt man nun q in der Formel (1) (Praktikumsaufgabe 11) durch eine beliebige integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so kann man

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\,\mathsf{d}x \approx \omega_1^{(n)} f(x_1^{(n)}) + \ldots + \omega_n^{(n)} f(x_n^{(n)})$$

erwarten.

(i) Schreiben Sie eine Funktion `gauss_quad`, die zu einem Funktions-Handle `func`, $n \in \mathbb{N}$ und der zur Gewichtsfunktion $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ gehörigen Klasse die näherungweisen Integrale

$$\omega_1^{(k)}\,\texttt{func}(x_1^{(k)}) + \ldots + \omega_k^{(k)}\,\texttt{func}(x_k^{(k)})$$

für $k = 1, \ldots, n$ ausgibt. Benutzen Sie dazu die zuvor implementierte Funktion `zps_weights`. Aufruf: `gauss_quad(func,n,class)`

(ii) Bestimmen Sie in einem Skript `skript_quad` die Werte der folgenden Integrale numerisch durch geeignete Wahl der Klasse und analysieren Sie den Fehler

$$\left| \int_a^b \omega(x) f(x)\,\mathsf{d}x - \left(\omega_{1k} f(x_1^{(k)}) + \ldots + \omega_{kk} f(x_k^{(k)}) \right) \right|$$

für $k = 1, \ldots, 10$ auf einer halblogarithmischen Skala (`semilogy`):

(a) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(b) $$\int_{-1}^{1} \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}x = \frac{35}{128}\pi$$

(c) $$\int_{0}^{\infty} \sin(x) \cdot e^{-x}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}$$

(d) $$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) \cdot e^{-x^2}\,\mathsf{d}x = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}}$$

(e) $$\int_{0}^{1} \frac{\log(x)}{(x+1)^2}\,\mathsf{d}x = -\log(2)$$