Lernziele

In diesem Praktikum sollen Sie üben und lernen:

- Interpolieren eines Kreises
- Mehrdimensionale Interpolation mittels zweidimensionalen Lagrange Faktoren

Bevor Sie mit den Praktikumsaufgaben beginnen, laden Sie die Datei session3.zip von der Vorlesungshomepage herunter und entpacken Sie diese in einem eigenen Ordner.

Praktikumsaufgabe 13 - Interpolation eines Kreises

Punkte in $\mathbb{R}^2$ können interpoliert werden, indem man eine Polynominterpolation der beiden Komponenten durchführt.
Hier soll nun der Einheitskreis durch $s = (s_1, s_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ interpoliert werden.

(i) Gegeben sei zunächst $s(0) = s(1) = (1, 0)$, $s(\frac{1}{4}) = (0, 1)$, $s(\frac{1}{2}) = (-1, 0)$, $s(\frac{3}{4}) = (0, -1)$. Weshalb kann man bei diesen Interpolationsbedingungen noch keine „kreisähnliche“ Kurve erwarten? Was müsste man noch fordern?

(ii) Zu den Voraussetzungen aus (i) sei noch $s_1'(0) = s_1'(1) = 0$ und $s_2'(\frac{1}{4}) = s_2'(\frac{3}{4}) = 0$ gegeben. Weshalb sind diese Voraussetzungen sinnvoll? Warum wird nicht zusätzlich $s_1'(\frac{1}{2}) = 0$ gefordert?

(iii) Berechnen Sie in einem Skript `circle_interpol` die Newton-Basis-Koeffizienten der Polynome s_1 und s_2, die durch die Hermite-Interpolation aus den Bedingungen (i) und (ii) hervorgehen. Ihnen steht dabei die funktion `hermite` zur Verfügung.

(iv) Plotten Sie die Kurve. Zur Auswertung eines Polynoms in Newton-Basis verwenden Sie das Horner-Schema: Die Funktion `horner`

```
function y=horner(t,c,x)

y=ones(size(t))*c(end);
for i=length(x)-1:-1:1
    y=c(i)+(t-x(i)).*y;
end
```

berechnet

$$p(t) = c_0 + c_1(t - x_0) + c_2(t - x_0)(t - x_1) + \ldots + c_n(t - x_0) \cdots (t - x_{n-1}),$$

wobei `c` dem Vektor $(c_0, \ldots, c_n)^T$ und `x` dem Vektor $(x_0, \ldots, x_n)$ entspricht.

(v) Plotten Sie zum Vergleich den Einheitskreis.

(vi) (fakultativ!) Berechnen Sie den maximalen Abstand von der Kurve zum Kreis.

(vii) (fakultativ!) Verwenden Sie nun als Stützstellen anstatt $t = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ allgemeiner $t = (0, a, \frac{1}{2}, 1 - a, 1)$. Zu welchem a approximiert die resultierende Kurve den Einheitskreis am Besten.

Praktikumsaufgabe 14 - Interpolation von Flächen

Wir betrachten nun die Interpolation auf einem zweidimensionalen Gebiet. Es soll zu einer Matrix $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$ ein Polynom $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$p(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} s^i t^j$$

gefunden werden, sodass $p(x_k, y_\ell) = f_{k,\ell}$ für vorgegebenes $x = (x_0, \dots, x_m)^T$ und $y = (y_0, \dots, y_n)^T$ gilt.

(i) Betrachten wir zunächst die Lagrange-Polynome

$$L_k^x(s) := \prod_{i \neq k} \frac{s - x_i}{x_k - x_i}\,.$$

Die Funktion `lagrange_pol` gibt zu $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)^T$ und $x = (x_0, \dots, x_m)^T$ eine Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(r+1)}$ mit $b_{ij} = L_i^x(s_j)$ aus. Versuchen Sie den Code zu verstehen und versuchen Sie das Ergebnis von

```
lagrange_pol(linspace(-1,1,5)',linspace(-1,1,5)')
```

nachzuvollziehen.

(ii) Sei nun der Interpolant zu den Stützstellen (x_i, y_j) und den Stützwerten F mit Hilfe der zweidimensionalen Lagrange-Faktoren durch

$$p(s,t) := \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n} f_{k,\ell} L_k^x(s) L_\ell^y(t)$$

definiert. Machen Sie sich klar, dass

$$p(x_k, y_\ell) = f_{k,\ell}$$

gilt.

(iii) Realisieren Sie diese Interpolation, indem Sie `runLagrange` vervollständigen.

(iv) Bei einer weiteren Interpolationsvariante geht man von der Darstellung

$$p(s,t) = q_0(t) + q_1(t)(s - x_0) + \ldots + q_m(t)(s - x_0)\cdots(s - x_{m-1})$$

aus. Da $p(s, y_j)$ in Abhängigkeit von s ein Polynom ist, welches die Punkte $(x_0, f_{0,j}), \dots, (x_m, f_{m,j})$ interpoliert, kann man die Newton-Basis-Koeffizienten $q_i(y_j)$ berechnen. Diese sind dann bei laufendem j als Interpolationsbedingungen des Polynoms q_i zu verstehen. Versuchen Sie die Realisierung dieses Algorithmus in `run2D` nachzuvollziehen und führen Sie dieses Skript aus.

(v) Vergleichen Sie beide Ergebnisse aus (iii) und (iv), indem Sie die maximalen Abweichung der beiden Interpolanten berechnen.