Lernziele

In diesem Praktikum sollen Sie üben und lernen:

- Kubische Splines
- Bernstein-Polynome

Praktikumsaufgabe 15 - Kubische Splines

Ein kubischer Spline $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist durch seine Stützstellen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und den dazugehörigen Stützwerten $y_0, \ldots, y_n$ sowie durch Randbedingungen folgender Art eindeutig bestimmt:

- **Natürliche Randbdingungen ('nat'):** $f''(a) = 0$ und $f''(b) = 0$
- **Periodische Randbedingungen ('per'):** $f'(a) = f'(b)$ und $f''(a) = f''(b)$
- **Vollständige Randbedingungen ('compl'):** $f'(a) = \gamma_1$ und $f'(b) = \gamma_2$

(i) Vervollständigen Sie die Funktion `coeff_spline`, die durch die Eingabe von

- $t = (t_0, \ldots, t_n)$,
- $y = (y_0, \ldots, y_n)$,
- der Art der Randbedingung durch Strings `'nat'`, `'per'` bzw. `'compl'` und
- dem optionalen Parameter (γ_1, γ_2) im Falle von `'compl'`

die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

zu den Polynomen $f|_{[t_i,t_{i+1}]}(x) = a_i(x - t_i)^3 + b_i(x - t_i)^2 + c_i(x - t_i) + d_i$ berechnet. Versuchen Sie in Anbetracht der Ahnlichkeit der Algorithmen zu den verschiedenen Randbedingungen die Fallunterscheidung auf das Nötigste zu beschränken. Aufruf: `A=coeff_spline(t,y,'condition',gamma)`

(ii) Berechnen Sie in der Funktion `eval_spline` nun mit Hilfe von der Koeffizientenmatrix A und dem Stützstellenvektor t für $a \leq r_0 < r_1 < \ldots < r_m \leq b$ die Funktionswerte $f(r_0), f(r_1), \ldots, f(r_n)$. Aufruf: `fr=eval_spline(t,A,r)`.

(iii) Schreiben Sie ein Matlab-Skript welches zu N äquidistanten Stützstellen auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ durch einen kubischen Spline interpoliert. Zeichnen Sie den Interpolationsspline und die Funktion f in eine Grafik. Zeichnen Sie den absoluten Fehler zwischen Funktion und Interpolationsspline in eine zweite Grafik. Führen Sie das Skript für verschiedene Werte von N und verschiedene Randbedingungen.

Praktikumsaufgabe 16 - Bernsteinpolynome

Die Polynome

$$B_{j,n}(t) := \binom{n}{j} t^j \, (1-t)^{n-j}$$

für $j = 0, \ldots, n$ heißen Bernstein-Polynome auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sum_{j=0}^{n} B_{j,n}(t) = 1$ gilt.

(ii) Schreiben Sie eine Funktion `bernstein`, die zu $t = (t_0, t_1 \ldots, t_m)$ sowie j und n den Vektor $(B_{j,n}(t_0), B_{j,n}(t_1), \ldots, B_{j,n}(t_m))$ ausgibt. Aufruf: `y=bernstein(t,n,j)`

(iii) Plotten Sie die Bernsteinpolynome $B_{0,4}, B_{1,4}, \ldots, B_{4,4}$ auf dem Intervall $[0, 1]$.