Lernziele

In diesem Praktikum sollen Sie üben und lernen:

- Bézier-Kurven
- Affine Transformation von Bézier-Kurven

Praktikumsaufgabe 17 - Bézierkurve

Sind $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so bezeichnet man die polynomiale Kurve

$$C(t) := \sum_{j=0}^{n} b_j B_{j,n}(t)$$

als Bézierkurve im $\mathbb{R}^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Dabei sind $B_{j,n}$ die Bernsteinpolynome (siehe Aufgabe 16). Die Punkte $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^2$ heißen Kontrollpunkte.

(i) Schreiben Sie eine Funktion `bezier`, die zu $t = (t_0, \ldots, t_m)$ und der Matrix $P = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2\times(n+1)}$ die Matrix $(C(t_0), C(t_1), \ldots, C(t_m)) \in \mathbb{R}^{2\times(m+1)}$ ausgibt. Aufruf: `y=bezier(t,P)`

(ii) Schreiben Sie ein Skript, bei dessen Aufruf der Nutzer aufgefordert wird die Kontrollpunkte $b_0, \ldots, b_n$ zu markieren, die zu einem Polygonzug verbunden werden und das dazu die Bézierkurve $C(t) := \sum_{j=0}^{n} b_j B_{j,n}(t)$ für $t \in [0, 1]$ plottet. Verwenden Sie dazu die Vorlage `script_bezier`, welche Sie auf der Vorlesungs-Homepage finden.

(iii) Sei $t \in [0, 1]$ fest gewählt und die Kontrollpunkte $b_0^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ die Startwerte der Rekursion von de Casteljau

$$b_j^{(k)} = t \cdot b_{j+1}^{(k-1)} + (1-t) \cdot b_j^{(k-1)} \quad \text{für } j = 0, \ldots, n-k\,,$$

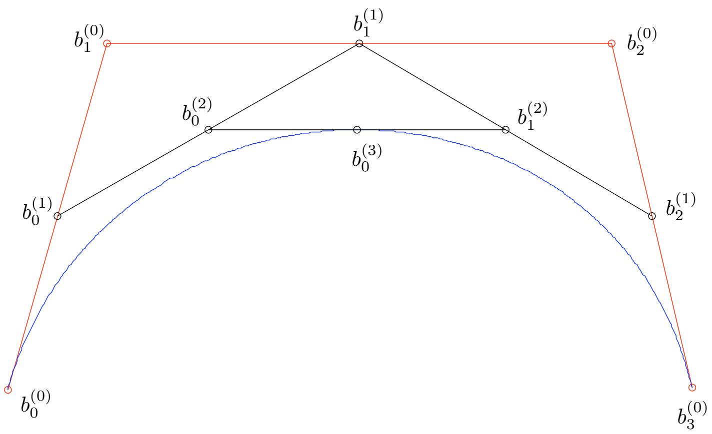
dann gilt

$$C(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(0)} B_{j,n}(t) = b_0^{(n)}\,.$$

Versuchen Sie sich anhand der Grafik (siehe unten) für $t = \frac{1}{2}$ klar zu machen, wie die Punkte $b_j^{(k)}$ geometrisch zu interpretieren sind. Machen Sie sich für $t = \frac{1}{3}$ mit Papier und Bleistift eine Skizze.

(iv) Schreiben Sie eine Funktion `casteljau`, die zu $t \in [0, 1]$ und $b_0^{(0)}, b_1^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ die Polygonzüge durch die Punkte $b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \ldots, b_k^{(k)}$ für $k = 0, \ldots, n$ zeichnet sowie deren Ecken $b_j^{(k)}$ durch kleine Kreise markiert. Aufruf: `b=casteljau(t,P)`

(v) Wenden Sie nun auf eine Beispielkurve aus 17 (ii) die Funktion `casteljau` für $t = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ an.



Praktikumsaufgabe 18 - Affine Transformationen

Wendet man auf eine Bezierkurve eine affine Transformation A an, so genügt es die affine Transformation auf dessen Kontrollpunkte anzuwenden, d. h. es gilt

$$A(C(t)) = \sum_{j=0}^{n} A(b_j) B_{j,n}(t) \, .$$

(i) Finden Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix} \, ,$$

sodass durch Drehen der Ebene am Ursprung um α gegen den Uhrzeigersinn der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf den Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ abgebildet wird.

(ii) Finden Sie analog zu Aufgabe 18 (i) eine Matrix T, die (x, y) um den Vektor $d \in \mathbb{R}^2$ verschiebt, d. h, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) + d$.

(iii) Finden Sie analog zu Aufgabe 18 (i) eine Matrix T, die (x, y) um den Faktor λ_1 in x-Richtung und um λ_2 in y-Richtung streckt, d. h, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$.

(iv) Schreiben Sie eine Funktion `rot_stretch`, die die Punkten $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ (als Matrix gegeben) um den Winkel α um den Fixpunkt $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})$ rotiert und anschließend mit Zentrum $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})$ mit λ streckt. Benutzen Sie dazu die Matrizen aus Aufgabe 18 (i) - (iii). Aufruf: `xy=rot_stretch(xy,xy_fix,alpha,lambda)`.

(v) Geben Sie sich durch `script_bezier` Kontrollpunkte der Bezier-Kurve vor, drehen Sie die Kontrollpunkte um den Schwerpunkt der $b_0, \dots, b_n$ um 90° und strecken Sie diese dann um den Faktor 2. Plotten Sie dann die Bézierkurve für die transformierten Koeffizienten.