Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Übungsblatt 1

(Abgabe: Freitag, 04.05.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 0 *(Organisatorisches)* (2 Punkte)

a) Melden Sie sich im SLC für diese Vorlesung an.

b) Finden Sie einen Kommilitonen, mit dem Sie die Übungsblätter gemeinsam abgeben.

c) Tragen Sie sich für die Matlab Gruppen und die Tutorien ein (Eintragung möglich bis 22. bzw. 29.04.2012, 18 Uhr).

Aufgabe 1 *(Modifiziertes Sekantenverfahren)* (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = (\tan(\frac{\pi x}{2}))^2 - 1$.

a) Skizzieren Sie den Graph von f.

b) Führen Sie für die Startwerte $x_0 = 0.9$ und $x_1 = 0$ zwei Schritte des Sekanten-Verfahren durch. Dann liegt x_3 nicht mehr im Definitionsbereich von f, d.h. für diese Startwerte ist das Verfahren nicht wohldefiniert!
Tragen Sie die beim Verfahren verwendeten Sekanten in ihre Skizze ein (und machen Sie sich dadurch klar wie es dazu kommen konnte).

c) Beim *modifizierten Sekantenverfahren* benutzt man die Formel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_j}{f(x_i) - f(x_j)} f(x_i)$$

wobei $j \leq i - 1$ als größter Index mit $f(x_i)f(x_j) < 0$ gewählt wird.
Zeigen Sie: Wählt man x_0 und x_1 aus dem Definitionsbereich so, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt, dann ist das modifizierte Sekantenverfahren in jedem Schritt wohldefiniert (d.h. die erzeugten x_{i+1} sind wiederum im Definitionsbereich).

Aufgabe 2 *(Etwas rechnen: Regula Falsi und Newton-Verfahren)* (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(t) = e^t - 3t$. $f(t)$ besitzt zwei Nullstellen t_1 und t_2. Die Berechnungen in dieser Aufgabe sind 4-stellig durchzuführen.

a) Zeigen Sie: $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2$.

b) Approximieren Sie, um einen Startwert für die Berechnung von t_1 zu bekommen die Exponentialfunktion durch die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung. Die entsprechende quadratische Gleichung ergibt eine Näherung für t_1. (Lösung: $\hat{t}_1 = 0.5858$)

c) Führen Sie für t_2 zwei Schritte der Regula Falsi mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ aus. (Lösung: $\hat{t}_2 = 1.312$)

d) Berechnen Sie die beiden Nullstellen durch Durchführung von jeweils 3 Schritten des Newton-Verfahrens, ausgehend von $\hat{t}_1$ und $\hat{t}_2$.

Aufgabe 3 *(Newton's method: rate of convergence for roots of multiplicity > 1)* (6+6 Punkte)

Assume the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has a root of multiplicity m ($m \geq 2$) in x^*, i. e.

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x), \quad g(x^*) \neq 0.$$

Show, if g is two times continuously differentiable then Newton's method achieves linear convergence in a neighbourhood of x^*.
This exercise has to be written in LaTeX.