Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Übungsblatt 2

(Abgabe: Freitag, 18.05.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 4 *(Newton-Verfahren für Systeme)* (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(1+y^2)-2 \\ 2x^2y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

der Funktion f.

b) Führen Sie zwei Schritte des zwei-dimensionalen Newton-Verfahrens für f mit dem Startvektor $(1.5, 0.5)^T$ durch.

Aufgabe 5 *(Newton method for complex functions)* (8+4 Punkte)

Consider the complex function $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defined by $f(z) = z^3 - 1$.

a) Formulate the Newton iteration belonging to f.

b) Find a mapping $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ such that $F = \zeta^{-1} \circ f \circ \zeta$ where $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $\zeta(x,y) = x + iy$.

c) Formulate the Newton iteration corresponding to this system F. Compare it with your result from sub-problem a).

This exercise has to be written in LaTeX.

Aufgabe 6 *(Konvergenzbereich Newton-Verfahren)* (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \arctan(x).$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen die Nullstelle $x^* = 0$ von f konvergiert, wenn der Startwert x_0 im Intervall $(-s, s)$ liegt und s die Bedingung

$$0 = (1+s^2)\arctan(s) - 2s$$

erfüllt.
Hinweis: Betrachten Sie den abgebildeten Grenzfall.

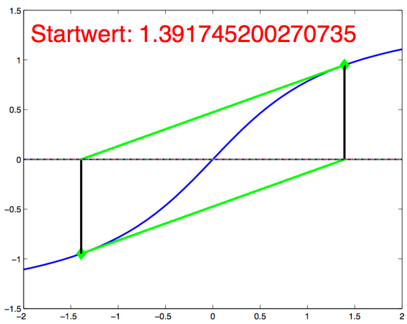

Abbildung 1: Verlauf des Newton-Verfahrens für den kritischen Startwert $x_0 = s$.

b) Durch eine geeignete Wahl der Folge (λ_n) kann der Konvergenzbereich des gedämpften Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \frac{f(x)}{f'(x)}$$

im Vergleich zu Teilaufgabe a) vergrößert werden. Für einen Startwert innerhalb des vergrößerten Konvergenzbereichs kann die folgende Fehlerabschätzung gezeigt werden:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq |1 - \lambda_n| \|x_n - x^*\| + c\lambda_n \|x_n - x^*\|^2.$$

Diskutieren Sie anhand dieser Fehlerabschätzung welche Bedingungen die Folge (λ_n) erfüllen muss, um

i) (lineare) Konvergenz,

ii) superlineare Konvergenz,

iii) lokal quadratische Konvergenz

zu erhalten.