Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 3

(Abgabe: Freitag, 01.06.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 7 *(Legendre-Polynome)* (14 Punkte)

Sei $\mathbb{P}$ der Raum der Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$. Wir definieren ein Skalarprodukt auf $\mathbb{P}$:

$$(q_1, q_2) := \int_{-1}^{1} q_1(x)q_2(x)\,dx \quad \forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{P}.$$

Das Skalarprodukt induziert eine Norm auf $\mathbb{P}$. Damit ist $\mathbb{P}$ ein normierter Vektorraum, und wir können die Begriffe *Länge, Winkel, Orthogonalität* für Polynome einführen.

a) Was ist die Länge von $m_0(x) = 1$ und $m_1(x) = x$?

b) Was ist der Winkel zwischen $m_0(x) = 1$ und $m_1(x) = x$?

c) Orthogonalisieren Sie die Polynome $m_0(x) = 1$, $m_1(x) = x$, $m_2(x) = x^2$ und $m_3(x) = x^3$, d.h. finde $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$ mit $(p_i(x), p_j(x)) = \delta_{i,j}(p_i(x), p_j(x))$, so dass $\operatorname{span}(m_0, m_1, m_2, m_3) = \operatorname{span}(p_0, p_1, p_2, p_3)$ gilt.

d) Mit Hilfe der Rodrigues-Formel lässt sich das n-te Legendre-Polynom P_n wie folgt darstellen:

$$P_n(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n.$$

Stellen Sie mit Hilfe dieser Formel das dritte Legendre-Polynom auf und bestimmen Sie dessen Nullstellen.

e) Die Legendre-Polynome erfüllen die Drei-Term-Rekursion

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{und} \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Stellen Sie das dritte Legendre-Polynom nach dieser Formel auf.

f) Zeigen Sie: Für die Legendre-Polynome gilt

i) $nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)$,

ii) $\left(1 - x^2\right) P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

Aufgabe 8 *(Orthogonal polynomials)* (4+4 Punkte)

The mapping

$$(f, g) := -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x)g(y)\log|x - y|\,dx\,dy$$

defines an inner product on the space of continous functions $\mathcal{C}[-1, 1]$. Let

$$m_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad m_k(x) = x^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

be the kth monomial. Orthogonalize m_0, m_1 and m_2 with respect to the inner product defined above using the Gram-Schmidt algorithm. Show that the resulting orthogonal polynomials do not satisfy the three-term recurrence relation

$$p_2(x) = (\alpha + x)p_1(x) + \gamma p_0(x) \quad \text{with} \quad \alpha = -\frac{(xp_1, p_1)}{(p_1, p_1)},\ \gamma = -\frac{(p_1, p_1)}{(p_0, p_0)}.$$

This exercise has to be written in LaTeX.

Hint: You can use Maple to compute the required inner products. For example

```
j := 0;
k := 1;
-int(int(x^j * x^k * log( (x-y)^2 )/2, x=-1..1), y=-1..1);
```

computes the inner product (m_j, m_k) for $j = 0$ and $k = 1$.

Aufgabe 9 *(Nullstellen von Orthogonalpolynomen)* (8 Punkte)

Wir betrachten für eine positive Gewichtsfunktion $w(x)$ auf $(a,b) \subset \mathbb{R}$ das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx$$

und bezeichnen mit $S_n, n = 0,1,2,\ldots,$ die zugehörigen Orthogonalpolynome mit führendem Koeffizienten eins.

a) Die Nullstellen dieser Orthogonalpolynome S_n sind in der Numerik von besonderer Bedeutung. Diese lassen sich in der Regel nicht analytisch berechnen. Man kann sie jedoch numerisch als Eigenwerte erhalten, wie die folgende Aussage zeigt:

   Seien $(S_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ Orthogonalpolynome wie oben angegeben, und es gelte die Drei-Term-Rekursion

   $$S_{-1}(x) = 0, \quad S_0(x) = 1, \quad S_n(x) = (x - a_n)S_{n-1}(x) - b_n^2 S_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

   wobei $b_n \geq 0$ gesetzt wird. Zeigen Sie, dass die Nullstellen von S_n gerade die Eigenwerte der Tridiagonalmatrix

   $$J_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

   sind.

b) Die Legendre-Polynome P_n erfüllen die obige Definition mit $w(x) \equiv 1$. Stellen Sie die Matrix J_n für die Legendre-Polynome auf.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe b) aufgestellten Matrix für $n = 3$.