Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Übungsblatt 4

(Abgabe: Freitag, 15.06.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 10 *(Legendre-Gauss-Quadratur)* (18 Punkte)

Betrachten Sie die Quadraturformel der Gauss-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx\; \hat{I}_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{(n)} f(\tau_i^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2.$$

a) Bestimmen Sie (für jedes feste $n = 0, 1, 2$) die Stützstellen $\tau_i^{(n)}$ $, 0 \leq i \leq n$, welche Nullstellen der Legendre-Polynome p_{n+1} sind:

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

b) Bestimmen Sie (für jedes feste $n = 0, 1, 2$) die Koeffizienten $\lambda_i^{(n)}$ so, dass Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert werden.

Hinweis 1: Machen Sie sich folgendes klar: Wenn die Monombasis $m_0(x) = 1,\ m_1(x) = x,\ m_2(x) = x^2$ mit obiger Quadraturformel exakt integriert werden kann, dann kann auch jede Linearkombination dieser Monome (d. h. alle Polynome mit Grad kleiner gleich 2) exakt integriert werden.

c) Bestimmen Sie (für jedes feste $n = 0, 1, 2$) den höchstmöglichen Grad von Polynomen, die mit den Koeffizienten $\lambda_i^{(n)}$ aus b) exakt integriert werden.

Hinweis 2: Aus Teil b) sollte auch klar sein, dass es dafür reicht das maximale k zu bestimmen für welches $m_k(x) = x^k$ noch exakt integriert werden kann.

d) Zeigen Sie, dass bei beliebiger Wahl der Stützstellen $\tau_i^{(n)}$ und der Koeffizienten $\lambda_i^{(n)}$ stets ein Polynom vom Grade $2n + 2$ existiert, das nicht exakt integriert wird.

e) Die Quadraturformeln haben also die Form

$$\begin{aligned}
\hat{I}_0(f) &= 2f(0), \\
\hat{I}_1(f) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\
\hat{I}_2(f) &= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f\left(0\right) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie entsprechenden Formeln für ein allgemeines Intervall $[a, b]$. Berechnen Sie $\hat{I}_0(f), \hat{I}_1(f), \hat{I}_2(f)$ für die Funktion

$$f(x) = \ln(x)$$

über dem Integrationsintervall $[1, 1.5]$. Vergleichen Sie die Werte mit dem exakten Integralwert $I(f)$.

Aufgabe 11 *(Gauss-Lobatto quadrature)* (6+6 Punkte)

The Gauss-Lobatto quadrature formula is similar to the Gauss quadrature. The main difference is that the integration points include the end points of the integration interval:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx\; \hat{I}_n(f) = \lambda_0^{(n)} f(-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(n)} f(\tau_i^{(n)}) + \lambda_n^{(n)} f(1).$$

a) Derive the Gauss-Lobatto quadrature formula for $n = 1$ and $n = 2$. For the case $n = 2$ use $\tau_1^{(2)} = 0$. Find values for $\lambda_i^{(n)}$ such that the quadrature formula is exact for polynomials up to degree n.

b) Determine for $n = 1$ and $n = 2$ the maximum degree of exactness, i. e. find the maximum value m such that the quadrature formula is exact for all polynomials of degree less or equal m.

This exercise has to be written in LaTeX.