

Übungsblatt 5

(Abgabe: Freitag, 29.06.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 12 (*Approximation von $\sqrt{2}$ mittels Interpolation*)

(9 Punkte)

- a) Berechnen Sie eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel: Werten Sie dafür zunächst die Funktion $f(x) = 2^x$ an den Stellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ aus und stellen Sie das Lagrange Interpolationspolynom

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{j,n}(x)$$

explizit dar. Werten Sie dieses Polynom anschliessend an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus.

- b) An das Ergebnis aus Teilaufgabe a) kann man bequemer gelangen:

Um das zu den Stützstellen x_j (mit $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$) eindeutig bestimmte Interpolationspolynoms an einer festen Stelle x auszuwerten, dient der Algorithmus von Neville:

$$P_{i,0}(x) := f(x_i)$$
$$P_{i,k}(x) := P_{i,k-1}(x) + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1}(x) - P_{i-1,k-1}(x))$$

für $0 \leq k \leq n$ und $k \leq i \leq n$

- i) Berechnen Sie für $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.
ii) Da Sie mit der Näherung nicht zufrieden sind, nehmen Sie als zusätzliche Stützstellen $x_4 = -2$ und $x_5 = 3$ hinzu und berechnen erneut eine (hoffentlich) bessere Näherung.

Aufgabe 13 (*Interpolation nach Newton*)

(6 Punkte)

- a) Berechnen Sie für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, und $x_2 = 1$ mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsform.
b) Die Stützstellen werden um $x_3 = -2$ und $x_4 = 2$ erweitert. Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_0, \dots, x_4 .

Aufgabe 14 (*Hermite interpolation*)

(9+6 Punkte)

For $f(x) = \cos(x)$ let $P(x)$ be the Hermite polynomial interpolating $f(x)$ at the points $x_i = 0, 0, 0, 0, \pi, \pi$, i.e.

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), P''(0) = f''(0), P'''(0) = f'''(0), P(\pi) = f(\pi), P'(\pi) = f'(\pi).$$

- a) Find $P(x)$.
b) Derive an error bound which holds in the interval $[0, \pi]$.

This exercise has to be written in \LaTeX .