Prof. Dr. Stefan Funken
Iris Häcker
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 2
SS 2012

Übungsblatt 6

(Abgabe: Freitag, 13.07.2012 um 8 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 15 *(Bernstein-Polynome)* (6 Punkte)

Soll einen glatte Kurve erzeugt werden (z.B. in der Computergrafik), so könnte man mit interpolierenden Polynomen oder Splines arbeiten und den Verlauf der Kurve über die zu interpolierenden Paare (x_i, f_i) steuern. Interpolationspolynome und auch interpolierende Splines können allerdings negativ werden, selbst wenn alle $f_i \geq 0$ sind. Um dies zu vermeiden, verwendet man die *Bernstein-Polynome* n-ten Grades,

$$B_i^n(t) := \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n;\ t \in I := [0, 1].$$

Offensichtlich hat B_i^n eine i-fache Nullstelle bei $t = 0$ und eine $(n-i)$-fache Nullstelle bei $t = 1$. Zeigen Sie:

(a) $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ für $i = 0, 1, \ldots, n;\ t \in I$.

(b) $(1-t)B_0^n(t) = B_0^{n+1}(t)$ und $tB_n^n(t) = B_{n+1}^{n+1}(t)$.

(c) B_i^n ist nichtnegativ auf I und hat für $i = 1, \ldots, n-1$ im Intervall I genau ein Maximum bei $t = i/n$.

(d) Die Bernstein-Polynome genügen für $i = 1, \ldots, n-1$ der rekursiven Vorschrift

$$B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t).$$

(e) Die Ableitung der Bernstein-Polynome für $i = 1, \ldots, n-1$ genügt der rekursiven Vorschrift

$$(B_i^n(t))' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right).$$

Eine Kurve x im $\mathbb{R}^k$ kann man nun mit

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t), \quad t \in I,$$

erzeugen und ihren Verlauf über die $b_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 0, \ldots, n$ steuern. Eine solche Kurve nennt man auch *Bézier-Kurve*, die b_i *Bézier-Punkte*. Achtung: Die Kurve x interpoliert *nicht* die Punkte b_i!

Aufgabe 16 *(Interpolation with cubic splines)* (4+4 Punkte)

Construct a clamped cubic spline $s(x)$, which interpolates

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(\pi x)$$

at the points $-1, 0, 1$ so that $s'(-1) = f'(-1)$ and $s'(1) = f'(1)$. This exercise has to be written in LaTeX.

Aufgabe 17 *(Spline-Bestimmung)* (6 Punkte)

Gegeben seien die drei Stützstellen $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (1, t)$ und $x_20 = (2, 0)$, mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie

a) die zugehörige lineare Spline-Interpolationsfunktion $s_1(x) \in \mathcal{C}^0[0, 2]$,

b) die zugehörige kubische Spline-Interpolationsfunktion $s_3(x) \in \mathcal{C}^2[0, 2]$ unter Annahme natürlicher Randbedingungen

in Abhängigkeit von dem reellen Parameter t. Zeichnen Sie die Funktionen für $t = 2$.

Aufgabe 18 *(Fehlerabschätzung für lineare Splines)* (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$ und s der interpolierende lineare Spline zu einem Gitter $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Es bezeichnen $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, die Längen der Teilintervalle und $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ die Gitterweite von Δ. Zeigen Sie, dass für die Maximumsnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$ über dem Intervall $[a,b]$ gilt

$$\|f - s\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{8} h^2 \|f''\|_{[a,b]}.$$

Aufgabe 19 *(Approximation mit linearen Splines)* (6 Punkte)

Betrachten Sie die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ durch die Punkte $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Sei $s(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k N_k(x)$ ein linearer Spline mit den Hutfunktionen N_k, $k = 0, \ldots, n$ als Basisfunktionen. Dieser Spline soll eine gegebenen Funktion f nun im Integralmittel möglichst gut approximieren, d.h. der Wert $\int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx$ soll minimal werden. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ des so definierten Splines s das Gleichungssystem $A\alpha = b$ erfüllen, wobei für $0 \leq i, j \leq n$

$$A_{ij} = \int_0^1 N_i(x) N_j(x) dx, \quad b_i = \int_0^1 f(x) N_i(x) dx$$

gilt. Berechnen Sie A in Abhängigkeit von $h = \frac{1}{n}$.