Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differentialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 1 - Abgabe: 24.04.2012 in der Übungsstunde

Allgemeine Bemerkungen:
Für die Zulassung zur mündlichen Prüfung am Ende des Semesters müssen *jeweils* 50 % der Punkte für Theorie- und Programmieraufgaben erreicht werden. Wurde eine Aufgabe eines Übungsblatts bearbeitet und abgegeben, muss der Kandidat in der Lage sein, die Aufgabe in der Übungsstunde vorzurechnen.

Aufgabe 1. Proportionale Steuerung für den nichtlinearen Fall (5 Punkte)

Im ersten Kapitel des Vorlesungsskripts wird gezeigt, dass proportionales Feedback im Allgemeinen nicht ausreichend ist, um das linearisierte Pendel wie gewünscht zu stabilisieren. Tatsächlich gilt dies auch für den nichtlinearen Fall

$$\ddot{\phi} - \sin\phi + \alpha\phi = 0. \tag{1}$$

Dazu betrachten wir die Energiefunktion

$$V(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = \cos\phi - 1 + \frac{1}{2}(\alpha\phi^2 + \dot{\phi}^2),$$

die man erhält, wenn man (1) mit $\dot{\phi}$ multipliziert und nach t integriert (Energiemethode). Zum physikalischen Hintergrund: `http://de.wikipedia.org/wiki/Energieerhaltungssatz#Energieerhaltungssatz_in_der_Newtonschen_Mechanik`.

Zeige zunächst, dass $V(\phi(t), \dot{\phi(t)})$ entlang der Lösung von (1) konstant ist. Man folgere dann, dass es Anfangswerte gibt mit $\phi(0) = \epsilon$, $\dot{\phi}(0) = 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig, für die nicht gilt, dass $\phi \to 0$ und $\dot{\phi(t)} \to 0$ wenn $t \to \infty$.

Aufgabe 2. Steuerung vs. Regelung (5 Punkte)

Im Gegensatz zu den vorgestellten Feedbackregelungen für das linearisierte Pendel, gibt es auch die Möglichkeit basierend auf den Anfangswerten eine Steuerfunktion (closed loop) zu berechnen und diese anzuwenden ohne auf aktuelle Messwerte zurückzugreifen. Angenommen es gilt $\phi(0) = 1$ und $\dot{\phi}(0) = -2$ und wir wollen die Lösung im Nullpunkt stabilisieren. Versuch und Irrtum zeigt, dass mit

$$u(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}$$

eine Regelfunktion gegeben ist, für die die Lösung

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-2t}$$

ist. Offenbar gilt $\phi \to 0$ für $t \to \infty$.

Angenommen die Anfangsgeschwindigkeit weicht nur ein wenig vom angenommen Wert ab, also

$$\phi(0) = 1, \; \dot{\phi}(0) = -2 + \epsilon, \; \text{mit } \epsilon > 0.$$

Zeige das gilt

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = \infty.$$

Analog für $\epsilon < 0$ zeige, dass die Lösung gegen $-\infty$ geht.