Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differenzialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 2 - Abgabe: 30.04.2012 (nach der Vorlesung)

Aufgabe 1. Zeitoptimale Steuerung eines Wagens (6 Punkte)

Betrachten Sie das Differenzialgleichungssystem des Raketenwagens aus Beispiel 3.1:

$$\dot{x}_1 = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = u(t), \tag{1}$$

wobei x_1 den Ort und x_2 die Geschwindigkeit des Wagens beschreibt. Es gelten die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 2. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differenzialgleichung zu der gegebenen Steuerung

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{für } t \in [0, t_1] \\ 1, & \text{für } t \in (t_1, T], \end{cases} \tag{3}$$

mit zunächst unbekannten Werten t_1 und T.

(b) Bestimmen Sie den Schaltpunkt t_1 und den Endzeitpunkt T so, dass $x_1(T) = x_2(T) = 0$ gilt.

Aufgabe 2. Lösung linearer Differenzialgleichungssysteme (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x(t). \tag{4}$$

(b) Geben Sie irgendeine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ sowie die (eindeutige) Übergangsmatrix (also die Fundamentalmatrix mit $\Phi(0) = I$) für dieses System an und bestimmen Sie die Inverse der Übergangsmatrix.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimalsteuerungsproblem. Finden Sie einen Zustand x_1, x_2 und eine Steuerung u, so dass das Integral

$$\int_0^1 u^2(t)dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \qquad x_1(0) = x_1(1) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \qquad x_2(0) = -x_2(1) = 1. \tag{6}$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Hinweises, dass $x_1(\cdot)$ und $x_2(\cdot)$ genau dann die Nebenbedingungen erfüllen, falls

$$-1 = \int_0^1 (1-s)u(s)ds, \tag{7}$$

$$-2 = \int_0^1 u(s)ds \tag{8}$$

gelten.

Hinweis: Bestimmen Sie eine Übergangsmatrix und nutzen Sie die Formel für die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right),$$

Das System hat einen doppelten Eigenwert λ. Für eine zweite Basislösung setze man ein Polynomvektor 1. Ordnung mit unbekannten Koeffizienten an:

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t}.$$