Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differenzialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 6 - Abgabe: 29.05.2012 (in der Übung)

Aufgabe 1. Legendre Transformation (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass aus den Hamilton'schen Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

mit Hilfe der Legendre-Transformation die Euler-Lagrange-Differenzialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,u)}{\partial u_i}\Big|_{(x(t),u(t))} = \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_i}\Big|_{(x(t),u(t))},$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$

folgen.

Aufgabe 2. Eulerbedingungen (5 Punkte)

Leiten Sie mit Hilfe der variationellen Behandlung von Optimalsteuerungsproblemen ausgehend von den allgemeinen Eulerbedingungen die notwendigen Optimalitätsbedingungen für den folgenden Spezialfall her: Die rechte Seite $f(t,x,u)$ und die Zielfunktion $L(x,u,t)$ hängen nicht von t ab, es gibt keine Randbedingung im Endzustand $x(t_f)$ und die Endzeit t_f ist fest.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Hamiltonfunktion H in der optimalen Lösung x^* gilt: $H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \text{const}$.

Aufgabe 3. Variationen (4 Punkte)

Definition 1. (Variation) *Für ein Funktional $I : V \supset D \to \mathbb{R}$, $y \in D$ und $v \in V$ mit $y + \varepsilon v \in D$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ heisst*

$$\delta I(y,v) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[I(y+\varepsilon v) - I(y)] = \frac{d}{d\varepsilon} I(y+\varepsilon v)|_{\epsilon=0}$$

erste Variation oder Gâteaux-Variation von I bei y in Richtung v (vorausgesetzt, der Grenzwert existiert).

(a) Sei $V = C^0[a,b]$ und $I(f) = \int_a^b f(x)^2 dx$. Berechnen Sie $\delta I(f,g)$ für $g \in V$.

(b) **(Zusatz + 4)** Sei das klassische Variationsproblem

$$\min \underbrace{\int_0^T L(x(t), \dot{x}(t))\, dt}_{I(x(t))}$$

$$\text{s.t. } x(0) = x_0, x(T) = x_T, L \in C^2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung aus der notwendigen Bedingung

$$0 = \delta I(y^*(t), g),$$

mit der optimalen Lösung y^* folgt.

Hinweis: Gilt für stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede Funktion $g \in C^2[a, b]$ mit $g(a) = g(b) = 0$, dann ist $f \equiv 0$.