Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differenzialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 7 - Abgabe: 05.06.2012 (in der Übung)

Aufgabe 1. Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Euler-Bedingungen (Tabelle) aus der Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung ableitbar sind.

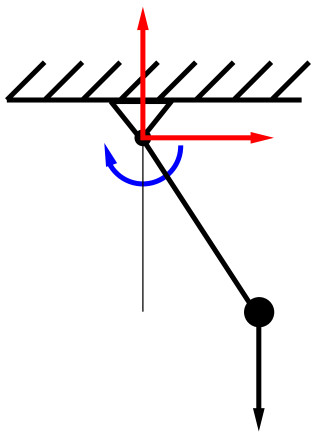
Aufgabe 2. Newtonsche Mechanik (4 Punkte)

Ein Massepunkt der Masse m mit den Koordinaten (x, y) sei über eine masselose starre Verbindungsstange der Länge $l > 0$ am Befestigungspunkt $(0, 0)$ aufgehängt. Aus der Mechanik ist bekannt, daß die Bewegung des Pendels unter Einfluß der Erdanziehung das Funktional

$$\int_0^{t_f} L(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt$$

minimiert unter Beachtung der Gleichungsnebenbedingung

$$x(t)^2 + y(t)^2 = l^2, \qquad t \in [0, t_f].$$



Die Funktion L setzt sich aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U zusammen:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T(\dot{x}, \dot{y}) - U(x, y), \qquad T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right), \quad U(x, y) = mgy.$$

Leiten Sie Euler-Lagrange'sche Differentialgleichungen für dieses Variationsproblem her.

Hinweis: Rechne in Polarkoordinaten.

Aufgabe 3. Optimales Durchschwimmen eines Flusses (8 Punkte)

Ein Hund will in kürzester Zeit einen Fluss durchschwimmen, vom Punkt $A = (1, a)$ zum Punkt $(0, 0)$. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist

$$v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x(1-x) \end{pmatrix}$$

Die Eigengeschwindigkeit des Hundes beträgt 1, als Steuerung u dient die Richtung (Winkel) seiner Eigengeschwindigkeit. Die Gesamtgeschwindigkeit setzt sich zusammen aus Eigen- und Strömungsgeschwindigkeit, siehe Abb. 1.

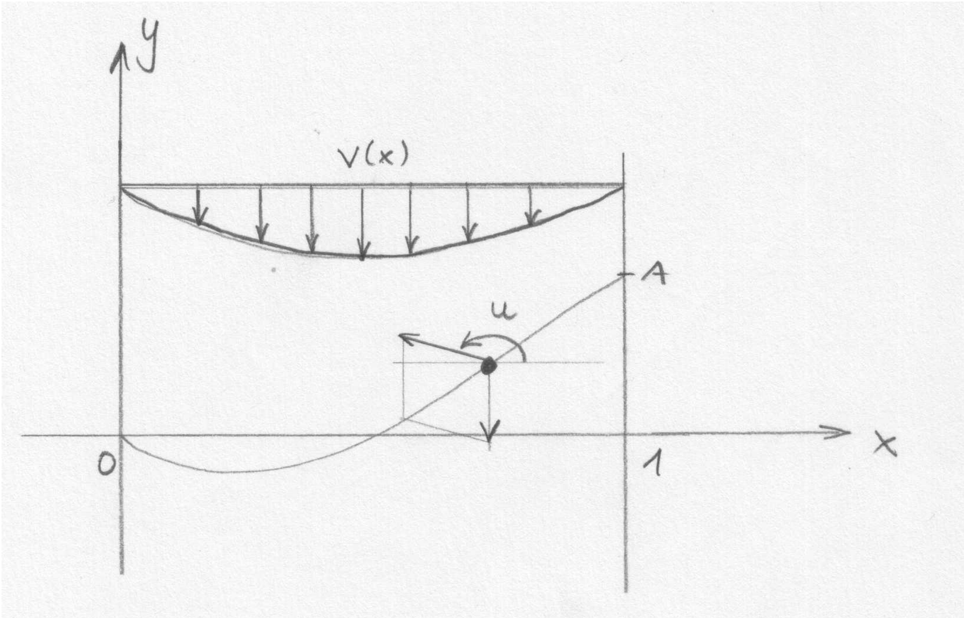


Abbildung 1

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Hundes

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y, u)$$

auf.

(b) Stellen Sie die Hamiltonfunktion für das Problem auf und werten Sie das Minimumprinzip aus. Geben Sie die adjungierten Differentialgleichungen, die Transversalitätsbedingungen und die Endzeitbedingungen an.

(c) Werten Sie die Minimumbedingungen für die Steuerung aus. Drücken Sie also die Steuerung durch die übrigen Variablen aus.

(d) Geben Sie ein Randwertproblem für $(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ mit allen Anfangs- und Endbedingungen an.