Universität Ulm

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Optimierung mit Differenzialgleichungen

Sommersemester 2012

Übungsblatt 8 - Abgabe: 12.06.2012 (in der Übung)

Aufgabe 1. Schattenpreisinterpretation der adjungierten Variablen (8 Punkte)

Gegeben ist die Aufgabe

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T \left(\frac{u^2}{2} - x\right) dt \\ \text{unter } &\dot{x} = u, \\ &x(0) = x_0. \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie die Aufgabe mit dem Minimumprinzip.

(b) Zeigen Sie, dass auch die hinreichenden Bedingungen (Satz 10.3) erfüllt sind.

(c) Wir betrachten nun das sogenannte Restlaufzeitproblem auf dem Intervall $[s, T]$ mit $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\min \int_s^T \left(\frac{u^2}{2} - x\right) dt \\ \text{unter } &\dot{x} = u, \\ &x(s) = a. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Problem und bestimmen Sie die Wertefunktion

$$V(s, a) = \text{optimaler Wert des Zielfunktionals bei Anfangsbedingung } x(s) = a.$$

(d) Bestimmen Sie $\frac{\partial V}{\partial a}(s, a)$ und vergleichen Sie mit $\lambda(s)$. Versuchen Sie damit die Bedeutung der adjungierten Variablen als Schattenpreis zu erklären.

Aufgabe 2. Vorbereitung Programmieraufgabe Randwertproblem (2 Punkte)

In MATLAB steht die Routine `bvp4c` zur Lösung von Zweipunkt-Randwertproblemen

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ 0 &= r(y(a), y(b)) \end{aligned}$$

im Intervall $[a, b]$ zur Verfügung.

Formulieren Sie notwendige Bedingungen für das folgende Optimalsteuerungsproblem (als Randwertproblem).

Minimiere

$$\frac{5}{2}(x(1)-1)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)^2 + x(t)^3 dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = u(t) - r(t), \qquad x(0) = 4$$

mit $r(t) = 15\exp(-2t)$.

Aufgabe 3. Äquivalente Formulierung von Steuerprozessen (6 Punkte)

(a) Transformieren Sie das lineare zeitoptimale Steuerproblem des Raketenwagens, also

$$\begin{aligned} &\min T \\ \text{unter } &\dot{x}_1 = x_2, \quad x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T = x_0, \\ &\dot{x}_2 = u, \quad x(T) = (0,0)^T, u(t) \in [-1,1] \end{aligned}$$

in ein Problem mit fester Endzeit.

(b) Transformieren Sie den nichtautonomen Steuerprozess mit freier Endzeit

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\int_0^T c_1x^2 + c_2y^2 + du^2 dt \\ \text{unter } &\dot{x} = yu + a(t), \quad x(0) = x_0, \\ &\dot{y} = -b(t)x + u, \quad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

in ein autonomes Mayer Problem mit fester Endzeit.