Übungsblatt 7

(Abgabe Fr. 14.06. 2013 um 10 Uhr vor der Übung.)

Aufgabe 21 (Auslöschung)

(2+6 Punkte)

- (a) Erklären Sie, wieso bei der Subtraktion zweier ungefähr gleicher Zahlen ($a - b$ mit $a \approx b$) Auslöschung auftritt.
- (b) Formen Sie folgende Ausdrücke um, sodass Auslöschung vermieden wird:
- (i) $\sqrt{x^2 + 1} - x$, für $x \gg 1$
 - (ii) $\cos(x + \epsilon) - \cos(x)$, für $|\epsilon| \ll 1$
 - (iii) $\log(2x) - \log(2x + 1)$, für $x \gg 1$

Lösung

- (a) Am Besten lässt sich Auslöschung an einem Beispiel erklären. Wir Berechnen $\sqrt{101} - \sqrt{100} = 0.049875621\dots$. Angenommen wir rechnen mit 6 Dezimalstellen Genauigkeit, so wäre das exakte Ergebnis 0.0498756. Da sich aber mit 6 Stellen folgende Rechnung ergibt:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} = 10.0499 - 10.0000 = 0.0499$$

sehen wir, dass statt der 6 exakten Stellen nur noch 2 signifikante Stellen exakt sind. Vergrößert man beide Zahlen, z.B. $\sqrt{10001} - \sqrt{10000}$ so erhält man beim Ergebnis gar keine exakte Stelle mehr.

- (b) (i)

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

- (ii) Es gilt $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$. Damit erhalten wir

$$\cos(x + \epsilon) - \cos(x) = \cos\left(\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\epsilon}{2}\right) - \cos\left(\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) - \frac{\epsilon}{2}\right) = -2 \sin\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

- (iii)

$$\ln(2x) - \ln(2x + 1) = \ln\left(\frac{2x + 1 - 1}{2x + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2x + 1}\right)$$

Aufgabe 22 (Maschinenzahlen/Rundung)

(6 Punkte)

Stellen Sie die Zahl $(12.7)_{10}$ exakt im Binärsystem dar. Stellen Sie die Zahl $(12.7)_{10}$ außerdem in der Menge $\mathbb{M}(2, 7, 3)$ durch

- (a) Abrunden
(b) Runden

dar. Welcher absoluter bzw. relativer Fehler (im Dezimalsystem) ergibt sich jeweils? Geben Sie alle Rechnungen an.

Lösung

Es gilt

$$(12.7)_{10} = (1100.101110)_{2}$$

Weiterhin erhalten wir

	Abbrechen	Runden
Darstellung als Maschinenzahl	$(1100.101)_{2} = (0.1100101)_{2} * 2^{(100)_{2}}$ (entspr. $(12.625)_{10}$)	$(1100.110)_{2} = (0.1100110)_{2} * 2^{(100)_{2}}$ (entspr. $(12.75)_{10}$)
Absoluter Fehler (Basis 10)	0.075	0.05
Relativer Fehler (in %)	0.59%	0.39%

Aufgabe 23 (MATLAB)

(10 Punkte)

- (a) Schreiben Sie ein Skript `main.m`, welches die Maschinengenauigkeit sowie die kleinste und die größte darstellbare, positive Gleitkomma-Zahl berechnet.
- (b) MATLAB hat für die Maschinengenauigkeit sowie die kleinste und die größte darstellbare, positive Gleitkomma-Zahl die festen Variablen `eps`, `realmin` und `realmax` definiert. Vergleichen Sie ihr berechnetes Ergebnis mit den MATLAB-Variablen und erklären Sie evtl. auftretende Unterschiede.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com
Betreff: Blatt07, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2