Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 4
SoSe 13

Übungsblatt 1

(Besprechung Do. 25.4./2.5. 2013)

Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben sollen am 25.4. während des Praktikums bearbeitet werden.

Aufgabe 1 *(Richtungsfelder)*

Um ein Gefühl für die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu bekommen ist es gut, ein Richtungsfeld zu zeichnen.
Für eine gewöhnliche Differentialgleichung $y' = f(t, y(t))$ mit $f : I \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist ein Richtungsfeld ein Vektorfeld, bei dem jedem Punkt $(t, y(t))$ ein Vektor der Länge 1 mit Richtung $(1, y'(t)) = (1, f(t, y(t)))$ zugeordnet wird.

(a) **(P)** Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `function plotVectorfield(f,t,y)`, die das Richtungsfeld einer Differentialgleichung $y' = f(t, y(t))$ zeichnet. `f` ist hierbei ein function handle und `t` und `y` sind Vektoren, die das Gitter beinhalten, auf dem das Vektorfeld gezeichnet werden soll. Für das Zeichnen können Sie die Matlab-Funktion `quiver` verwenden.

(b) **(P)** Zeichnen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils das Richtungsfeld.

- $y'(t) = 0.5y(t)$, $t \in [0, 5]$
- $y'(t) = y(t)^2 + t^2$, $t \in [0, 2]$
- $y'(t) = (5 - 5y)y$, $t \in [0, 2]$

Verwenden Sie als Vorlage die Datei `mainVectorfield.m`, die Sie auf der Homepage finden.

Aufgabe 2 *(Euler Verfahren)*

Gegeben sei eine Differentialgleichung (oder ein System) erster Ordnung $y' = f(t, y)$. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung y im Zeit-Intervall $t = [t_a, t_e]$. Hierzu wird das Zeit-Intervall in N gleichgroße Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0 \dots N - 1$, $t_0 = t_a, t_N = t_e$ unterteilt.

(a) Leiten Sie das Euler Verfahren für den eindimensionalen Fall aus folgender Idee her:

> Zum aktuellen Zeitschritt t_k wird eine Tangente $T_k(t)$ an die Funktion $y(t)$ gelegt und diese wird an der Stelle t_{k+1} ausgewertet. Der Funktionswert $T_k(t_{k+1})$ ist dann die Näherung an den gesuchten Wert $y(t_{k+1})$. Machen Sie sich die Vorgehensweise an einer Skizze klar und leiten Sie daraus die Berechnungsvorschrift für y_{k+1} her.

Wie könnte man das so gewonnene Verfahren verbessern?

(b) **(P)** Schreiben Sie eine Funktion `y = euler_expl(f,y0,t0,tN,N)` in der das Euler-Verfahren für das Anfangswertproblem $y(t) = f(t, y(t))$, $y(t0) = y0$ ausgeführt wird. Das Zeitintervall $[t0, tN]$, auf dem die Lösung gesucht wird, soll dabei in N Teilintervalle unterteilt werden. `f` ist ein function handle.

(c) **(P)** Ergänzen Sie Ihr Skript aus der vorigen Aufgabe, so dass für jede Differentialgleichung auch die Lösung für verschiedene Startwerte $y0$ (sinnvoll wählen!) gezeichnet wird.

Aufgabe 3 *(Zeemans Herzschlagmodell)*

(P) Zeemans Herzschlagmodell beschreibt die Funktionsweise des Herzens. Sei $\ell = \ell(t)$ die Länge der Herzmuskelfaser und $p = p(t)$ das elektrochemische Potential. Dann gilt der Zusammenhang

$$\ell' = -(\ell^3 - \alpha\ell + p)$$
$$p' = \beta\ell,$$

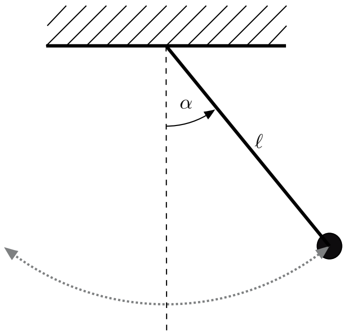
wobei α die Vorspannung der Muskelfaser und β der Rückkopplungsparameter ist.
Lösen Sie das System erster Ordnung mit der Matlab-Funktion `ode45` für $t \in [0, 100]$, $\ell(0) = 1$, $p(0) = 0$, $\beta = 0.1$ und $\alpha \in \{0.1, 0.5, 3\}$. Zeichnen Sie für jedes α die Größen $p(t)$ $\ell(t)$ über t, sowie $p(t)$ über $\ell(t)$ und beschreiben Sie die Grafiken (speziell auch den Einfluss des Parameters α).

Aufgabe 4 *(Mathematisches Pendel)*

Für ein mathematisches Pendel der Länge ℓ gilt für den Auslenkungswinkel $\alpha(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t folgende Differentialgleichung:

$$\alpha''(t) + \frac{g}{\ell} \sin \alpha(t) = 0,$$

wobei $g = 9.81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist.(Das folgt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung)



(a) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} = f((\alpha, \alpha')^T) = \begin{pmatrix} f_1((\alpha, \alpha')^T) \\ f_2((\alpha, \alpha')^T) \end{pmatrix}$$

(b) Für eine autonome Differentialgleichung, also eine Differentialgleichung, bei der die rechte Seite f nur von y und nicht von t abhängt, kann man das Vektorfeld $f(y)$ zeichnen. Zeichnen Sie das Vektorfeld f für $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$ und $\alpha' \in [-1, 1]$. Erklären Sie, was das Vektorfeld beschreibt.

(c) Lösen Sie das System mit Hilfe der Funktion `euler_expl` aus der vorigen Aufgabe mit 1000 Zeitschritten sowie mit der Matlab-Funktion `ode45` (Siehe Matlab Hilfe) für $\alpha(0) = \pi/5$. Zeichnen Sie die beiden Lösungen für $t \in [0, 20]$ in Abhängigkeit von der Zeit und interpretieren Sie die Grafik.
Hinweis: Die Funktion `ode45` löst die Differentialgleichung mit nicht-uniformen Zeitschritten. Der Vektor der verwendeten Zeitschritte wird von der Funktion zurück gegeben. Um nun die Lösung des Euler Verfahrens mit der von `ode45` vergleichen zu können, muss die Lösung von `ode45` auf dem uniformen Zeitgitter, das für das Euler-Verfahren verwendet wurde, interpoliert werden. Hierfür bietet sich die Matlab-Funktion `interp1` an.

(d) Berechnen Sie aus beiden Lösungen die Position des Pendels zum Zeitpunkt t und erstellen Sie eine Animation, in der für beide Lösungen die Pendelschwingung dargestellt wird.

(e) Zeichnen Sie für verschiedene Anfangswerte $\alpha(0) \in \{\pi/5, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi\}$ die Kurven von $\alpha'(t)$ über α und erklären Sie die Grafiken.

Aufgabe 5 *(Taylor)*

(a) Geben Sie das Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ vom Grad 3 im Intervall $[x_0, x]$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit dem Lagrangeschem Restglied an.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von

$$f(x, y) = \frac{e^{xy}}{1 - (x + y)}$$

um den Punkt $(0, 0)$ bis zum zweiten Grad.

Aufgabe 6 *(Konsistenz / Konvergenzordnung)*

(a) Zeigen Sie, dass das explizite Euler Verfahren konsistent ist und mit Ordnung 1 konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass das Euler Verfahren der Ordnung p konsistent ist und mit Ordnung p konvergiert.