Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 2

(Besprechung Do. 16.5. 2013)

Aufgabe 7 *(Einschrittverfahren)*

Wir betrachten die Verfahrensfunktion

$$\phi(t, y, h) = a_1 f(t, y) + a_2 f\big(t + b_1 h, y + b_2 h f(t, y)\big)$$

für ein Einschrittverfahren. Die Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar und h sei die Schrittweite. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2 so, dass sich die Konvergenzordnung 2 ergibt.

Aufgabe 8 *(Matlab: Trapezregel-Verfahren)*

Implementieren Sie das Trapezregel-Verfahren mit Fixpunktiteration. Überlegen Sie eine geeignete Abbruchbedingung des Iterationsverfahrens für das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems. Testen Sie Ihre Funktion für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_1 y_2^2 + 294 y_2, \quad && y_1(0) = 1, \\ y_2' &= \frac{y_1 - y_1 y_2}{98} - 3y_2, && y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Plotten Sie Ihre Lösung von $t = 0$ bis $t = 10$ für die Schrittweiten $h = 0.2$ und $h = 1$. Was passiert bei der Wahl einer zu großen Schrittweite?

Aufgabe 9 *(Runge-Kutta-Verfahren)*

Wir können das m-stufige Runge-Kutta-Verfahren für ein Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ allgemein angeben als

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell k_\ell(t_k, y_k)$$

mit konstanter Schrittweite $h > 0$ und

$$\begin{aligned} k_1(t, y) &= f(t, y) \\ k_2(t, y) &= f\big(t + a_2 h, y + h b_{2,1} k_1(t, y, h)\big) \\ k_3(t, y) &= f\big(t + a_3 h, y + h(b_{3,1} k_1(t, y) + b_{3,2} k_2(t, y))\big) \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ k_m(t, y) &= f\Big(t + a_m h, y + h \sum_{\ell=1}^{m-1} b_{m,\ell} k_\ell(t, y)\Big) \end{aligned}$$

$a_m \in [0, 1]$, $b_{m,\ell} \in \mathbb{R}$ und $c_\ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Das Runge-Kutta-Verfahren ist ein Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\phi(t, y, h) = \sum_{\ell=1}^{m} c_\ell k_\ell(t, y, h).$$

Zeigen Sie: Erfüllt die Funktion f eine Lipschitzbedingung, so erfüllt auch die Verfahrensfunktion $\phi(t, y, h)$ des RKV eine Lipschitzbedingung.

Aufgabe 10 *(Runge-Kutta-Verfahren (2))*

Zeigen Sie:
Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent für alle $f \in \mathcal{C}^1$, falls $c_1 + \ldots + c_m = 1$ gilt.
Um Konvergenzordnung 2 zu realisieren, muß zusätzlich

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} \qquad i = 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i a_i = \frac{1}{2}$$

gelten.

Aufgabe 11 *(Matlab: Runge-Kutta-Verfahren)*

Programmieren Sie das 3-stufige implizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Verwenden Sie zur Lösung des impliziten Gleichungssystems das einfache Fixpunktiterationsverfahren mit $M \in \mathbb{N}$ Iterationen und Startwert 0. Versuchen Sie dabei, die spezielle Struktur des Verfahrens (letzte Spalte von B verschwindet!) möglichst gut auszunutzen.
Testen Sie Ihr Programm an der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -2\; t\; y(t)^2, \quad y(0) = 1.$$

Zeigen Sie zunächst, dass die exakte Lösung des Anfangswertproblems durch

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

gegeben ist. Berechnen Sie dann für $M = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils mit den Schrittweiten $h := \frac{1}{N}$, $N \in \{10, 20, 40, 80, 160, 320\}$ die Fehler $e_N = |y_N - y(1)|$ an der Stelle $t = 1$ sowie die numerischen Konvergenzordnungen

$$\frac{\ln\left(\frac{e_{N/2}}{e_N}\right)}{\ln(2)}, \quad N \neq 10.$$

Was beobachten Sie?
Testen Sie Ihre Routinen auch für das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= & & y_2(t) & -y_3(t), & \qquad y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) &= & -2y_1(t) & +3y_2(t) & -y_3(t), & \qquad y_2(0) = -1, \\ y_3'(t) &= & -y_1(t) & +y_2(t) & +y_3(t), & \qquad y_3(0) = 2. \end{aligned}$$