

Übungsblatt 3

(Besprechung Do. 23.5. 2013)

Aufgabe 12 (*Auswertung der Legendre Polynome*)

Das Legendre Polynom P_n ist die Lösung der Differentialgleichung

$$(1 - z^2)f''(z) - 2zf'(z) + n(n+1)f(z) = 0. \quad (1)$$

Das n -te Legendre Polynom kann also an einer Stelle $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ ausgewertet werden, indem man die obige Differentialgleichung entlang eines Geradenstücks von z_0 nach z_1 löst. Das Geradenstück kann durch

$$z(s) = z_0 + s(z_1 - z_0), \quad s \in [0, 1]$$

parametrisiert werden. Wir setzen $z(s)$ in (1) ein und schreiben die Gleichung in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f_1(z(s)) &= (z_1 - z_0) f_2(z(s)) \\ \frac{d}{ds}f_2(z(s)) &= (z_1 - z_0) \frac{2z(s)f_2(z(s)) - n(n+1)f_1(z(s))}{1 - z(s)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Dieses System erster Ordnung lösen wir nun für $s \in [0, 1]$. Dafür brauchen wir die Anfangswerte $P_n(z_0)$ und $P'_n(z_0)$. Eine geschickte Wahl ist $z_0 = 0$.

(a) Leiten Sie aus den Rekursionsformeln für die Legendre Polynome

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z) \quad (3)$$

bzw. für deren Ableitung

$$(z^2 - 1)P'_n(z) = n(zP_n(z) - P_{n-1}(z)) \quad (4)$$

explizite Formeln für $P_n(0)$ und $P'_n(0)$ her.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `function val = evalLeg(z,n)`, welche das Legendre Polynom P_n an der Stelle $z \in (-1, 1)$ durch das Lösen der ODE (2) für $z_0 = 0$ ausgewertet. Zum Lösen der Differentialgleichung können Sie z.B. die Matlab-Funktion `ode45` verwenden.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `function val = evalLegRec(z,n)` welche das Legendre Polynom P_n an der Stelle $z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Rekursion (3) ausgewertet. (Die Startwerte sind $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$.) und vergleichen Sie die Ergebnisse der Rekursion mit den Ergebnissen aus Teil (b) für verschiedene $z \in (-1, 1)$.

Soll ein Legendre Polynom in $z \in \mathbb{C}$ ausgewertet werden, wird (2) ein System aus komplexwertigen ODEs. Um die komplexe Arithmetik zu vermeiden, schreiben wir das System in ein System erster Ordnung mit vier Gleichungen um, in dem wir Real- und Imaginärteil getrennt betrachten. Unsere Lösung f ist also $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T = (Re(P_n(z)), Im(P_n(z)), Re(P'_n(z)), Im(P'_n(z)))^T$.

(d) Erweitern Sie die Funktion aus Teil (b), sodass die Auswertung eines Legendre Polynoms in $z \in \mathbb{C}$ möglich ist. Sie dürfen die Matlab Funktionen `real()` und `imag()` verwenden. Vergleichen Sie die Ergebnisse der Funktion mit den Ergebnissen der Funktion aus Teil (c) für verschiedene $z \in \mathbb{C}$.

(e) Erstellen Sie je einen surface- oder contour-plot von $\log_{10} |P_3(z)|$ und $\log_{10} |P_7(z)|$ für $-1.5 \leq Re(z) \leq 1.5$ und $-1 \leq Im(z) \leq 1$.

Aufgabe 13 (*Adams-Moulton-Verfahren*)

Bestimmen Sie die Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ des 2-Schritt Adams-Moulton-Verfahrens

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h \sum_{j=0}^2 \beta_j f(t_{k+j}, y_{k+j})$$

- durch Betrachtung des zugrunde liegenden Interpolationsverfahrens,
- mit Hilfe des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren. (ein lineares k-Schritt Verfahren hat Konsistenzordnung p genau dann wenn $\sum_{j=0}^k [j^\ell \alpha_j - \ell j^{\ell-1} \beta_j] = 0$ für $\ell = 0, \dots, p$.)

Aufgabe 14 (*Matlab: Adams-Bashforth*)

Programmieren Sie das Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{j+4} - y_{j+3} = \frac{h}{24} (55f(t_{j+3}, y_{j+3}) - 59f(t_{j+2}, y_{j+2}) + 37f(t_{j+1}, y_{j+1}) - 9f(t_j, y_j)).$$

Testen Sie Ihr Programm an der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -2ty(t)^2, \quad y(0) = 1,$$

wobei die Startwerte y_1, y_2, y_3

- mit den exakten Werten belegt werden (siehe Aufgabe 11),
- mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens aus Aufgabe 11,
- mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens berechnet werden.

Bestimmen Sie jeweils mit den Schrittweiten $h = 1/N$, $N \in \{10, 20, 40, 80, 160, 320\}$ die Fehler $e_N := |y_N - y(1)|$ sowie die numerischen Konvergenzordnungen.

Aufgabe 15 (*Differenzengleichungen*)

Berechnen Sie die Lösungen $(y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ der folgenden linearen Differenzengleichungen:

- (a) $y_{j+2} = y_{j+1} + y_j \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$ (Fibonacci-Zahlen),
- (b) $4y_{j+3} - 8y_{j+2} + 5y_{j+1} - y_j = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 2.$