Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 4
SoSe 13

# Übungsblatt 4

(Besprechung Do. 6.6. 2013)

**Aufgabe 16** *(Konsistenzordnung)*

Bestimmen Sie die genauen Konsistenzordnungen der durch

(a) $y_{j+3} = y_{j+1} + \frac{h}{3}\big(7f(t_{j+2}, y_{j+2}) - 2f(t_{j+1}, y_{j+1}) + f(t_j, y_j)\big)$,

(b) $y_{j+3} + \frac{1}{4}y_{j+2} - \frac{1}{2}y_{j+1} - \frac{3}{4}y_j = \frac{h}{8}\big(19f(t_{j+2}, y_{j+2}) + 5f(t_j, y_j)\big)$

gegebenen Mehrschritt-Verfahren.

**Aufgabe 17** *(Konsistenzordnung)*

Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ des durch

$$y_{j+3} - a_0 y_{j+2} - y_{j+1} + a_0 y_j = h\big( - b_0 f(t_{j+2}, y_{j+2}) + b_1 f(t_{j+1}, y_{j+1}) + b_0 f(t_j, y_j)\big)$$

gegebenen linearen Mehrschrittverfahrens so,

(a) dass die Konsistenzordnung maximal wird.
Ist das enstehende Verfahren nullstabil?

(b) dass sich eine Schar nullstabiler Methoden möglichst hoher Ordnung ergibt.

**Aufgabe 18** *(Inhärente Instabilität)*

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \lambda(y(x) - F(x)) + F'(x)$$
$$y(x_0) = y_0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie dass die allgemeine Lösung diese Problems durch $y(x) = (y_0 - F(x_0))e^{\lambda(x-x_0)} + F(x)$ gegeben ist

(b) Überlegen Sie wie die Lösung $y(x)$ sich verhält, wenn man $y_0 = F(x_0)$ wählt? Was passiert, wenn man $y_0 \neq F(x_0)$ wählt? Was bedeutet dies für ein numerisches Verfahren zum Lösen dieses Problems?

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 10\left(y - \frac{x^2}{x^2+1}\right) + \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad y(0) = 0$$

mit

- dem Trapezregel-Verfahren
- dem impliziten Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 11 und
- dem Adams-Bashforth-Verfahren (Verwenden Sie für die Startwerte das klassische RK4, siehe Datei auf der Homepage).

Verwenden Sie für jedes Verfahren 1000 Schritte. Zeichnen Sie alle Lösungen gemeinsam mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ für $x \in [0, 3]$ in eine gemeinsame Grafik. Verwenden Sie `ylim([-1.5,1.5]);`.

**Aufgabe 19** *(Doppelpendel)*

Die Bewegungsgleichungen für ein Doppelpendel (siehe Abbildung) sind durch

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\ell_1\ddot{\varphi}_1 + m_2\ell_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2\ell_2\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + g(m_1+m_2)\sin(\varphi_2) &= 0 \\ m_2\ell_2\ddot{\varphi}_2 + m_2\ell_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2\ell_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + gm_2\sin(\varphi_2) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben, wobei $g = 9.81m/s^2$ die Erdbeschleunigung ist.

(a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in ein System erster Ordnung um.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit dem `ode45` mit Schrittweite 1e-3 für $t \in [0, 20]$.

(c) Zeichnen Sie die Trajektorien und erstellen Sie eine Animation, die den Bewegungsablauf des Pendels zeigt, für folgende Konfigurationen:
$m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 1.732051$

- $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2(0) = \pi$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$,
- $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2(0) = \pi + 10^{-2}$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.