Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik 4
SoSe 13

Übungsblatt 5

(Besprechung Do. 13.6. 2013)

Aufgabe 20 *(Stabilitätsgebiete für Einschrittverfahren)*

Die Stabilitätsfunktion $R(z)$ eines Einschrittverfahrens wird wie folgt definiert: Wendet man das Verfahren auf die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ an, dann ist ein Schritt des Verfahrens durch

$$y_1 = R(h\lambda)y_0$$

gegeben. Man bezeichnet das Gebiet $\{z : |R(z)| \leq 1\}$ in der komplexen Ebene als Stabilitätsgebiet des Verfahrens.

(a) Für festes $\theta \in [0, 1]$ sei das Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-\theta)f(t_i, y_i) + \theta f(t_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

gegeben. Für $\theta = 0$ ergibt sich das explizite Euler-Verfahren, für $\theta = 1$ das implizite Euler-Verfahren und für $\theta = 1/2$ das Trapezregel-Verfahren. Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion in Abhängigkeit von θ und stellen Sie das Stabilitätsgebiet für verschiedene $\theta \in [0, 1]$ graphisch dar (z.B. auch mit Matlab). Für welche Werte von θ ist das Verfahren A-Stabil?

(b) Zeigen Sie, dass alle s-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = s$ die Stabilitätsfunktion

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^s}{s!}$$

haben. Stellen Sie die Stabilitätsgebiete für $s = 1, 2, 3, 4, 5$ (mit Matlab) graphisch dar.

Aufgabe 21 *(Stabilitätsgebiete für lineare Mehrschrittverfahren)*

Gegeben Sei ein lineares k-Schrittverfahren

$$\sum_{r=0}^{k} \alpha_r y_{j+r} = h \sum_{r=0}^{k} \beta_r f_{j+r}$$

und die dazugehörigen Polynome

$$\rho(z) = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r z^r \quad \sigma(z) = \sum_{r=0}^{k} \beta_r z^r.$$

Dann ist das Stabilitätspolynom des k-Schrittverfahrens gegeben durch

$$\pi(z, h\lambda) = \rho(z) - h\lambda\sigma(z)$$

und die Nullstellen von π werden mit $z_i(h\lambda)$ bezeichnet. Die Menge

$$R = \{h\lambda \; : \; |z_j(h\lambda)| < 1 \; , \; j = 0, \ldots, k\}$$

heißt Stabilitätsgebiet der k-Schrittverfahrens. Man kann zeigen, dass für den Rand von R gilt

$$\partial R \subseteq \widehat{R} := \{\widehat{h} \in \mathbb{C} \; : \; \widehat{h} = \rho(\exp(\mathrm{i}\phi))/\sigma(\exp(\mathrm{i}\phi)), \; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$

Zeichnen Sie die Menge $\widehat{R}$ (mit Matlab) für die folgenden k-Schritt-Verfahren:

- k-Schritt Adams-Bashforth-Verfahren $y_{i+1} = y_i + h\sum_{r=0}^{k} \alpha_r f_r$:

k	α_k			
1	1			
2	3/2	-1/2		
3	23/12	-16/12	5/12	
4	55/24	-59/24	37/24	-9/24

- k-Schritt Adams-Moulton-Verfahren $y_{i+1} = y_i + h\sum_{r=0}^{k} \alpha_r f_r$:

k	α_k				
1	1/2	1/2			
2	5/12	8/12	-1/12		
3	9/24	19/24	-5/24	1/24	
4	251/720	646/720	-264/720	106/720	-19/720[1mm]

Aufgabe 22 *(Steife AWP's)*

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}$$

(a) Wie lautet die exakte Lösung?

(b) Schreiben Sie $y_k = f_1(h,k)v_1 + f_2(h,k)v_2$ für explizite Euler-Verfahren, wobei v_1 und v_2 die Eigenvektoren von A sind. Was folgt für die Schrittweite?

(c) Schreiben Sie $y_k = f_1(h,k)v_1 + f_2(h,k)v_2$ für implizite Euler-Verfahren, wobei v_1 und v_2 wobei v_1 und v_2 die Eigenvektoren von A sind. Warum unterliegt dieses Verfahren keiner Schrittweitenbeschränkung?