Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math Markus Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 6

(Besprechung Do. 20.6. 2012)

Einführung in die Finite Elemente Methode:
Wir betrachten das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (-1,1) \tag{1}$$
$$u(-1) = u(1) = 0. \tag{2}$$

für $u \in C^2((0,1)) \cap C([0,1])$.
Zunächst leiten wir eine schwächere Formulierung des Problems her. Hierzu multiplizieren wir die Gleichung (1) mit einer beliebigen Testfunktion v (aus einem geeigneten Raum X) und integrieren die Gleichung. Das liefert

$$-\int_{-1}^{1} u''(x)v(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in X.$$

Wenden wir auf der linken Seite partielle Integration an, so erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in X. \tag{3}$$

Die Randterme fallen hier weg, da $u(-1) = u(1) = 0$. Gleichung (3) heißt schwache Formulierung der Differentialgleichung. Der nächste Schritt ist es, die schwache Formulierung in ein diskretes Problem umzuschreiben. Hierzu wählen wir u und v aus einem endlich dimensionalen Funktionenraum $X_h \subset X$. Wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ eine Basis von X_h ist, so können wir schreiben

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x).$$

Anstatt Gleichung (3) mit allen $v \in X_h$ zu testen, könnnen wir nun auch mit allen Basisfunktionen φ_i testen. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{1} u'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_i(x)dx \quad i = 1, \ldots, N \\ \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{-1}^{1} \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_i(x)dx \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, wobei die so genannte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ gegeben ist durch

$$a_{i,j} = \int_{-1}^{1} \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx$$

und die rechte Seite $\mathbf{f} = (f_i)$ ist gegeben durch

$$f_i = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Lösen des linearen Gleichungssystems liefert einen Vektor $\mathbf{u}$, der zusammen mit der Basis von X_h die Lösung von (3) darstellt.

Aufgabe 23 *(1D FEM mit verschiedenen Basisfunktionen)*

Wir betrachten die Finite Elemente Methode für

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (-1,1). \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Als Basis für den diskreten Raum X_h sollen nun verschiedene Funktionen verwendet werden. Berechnen Sie für jede der folgenden Funktionen die Steifigkeitsmatrix auf dem Papier:

- Hut-Funktionen. Zu einem gegebenen Gitter $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ definieren wir die Hut-Funktion

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}]\,, \\ 0, & sonst \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N.$$

  Das Gitter soll hier als äquidistand gewählt werden, d.h. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots N$,

- Trigonometrische Funktionen. $\varphi_k(x) = \sin(k\pi(x+1)/2)$, $k = 1, \ldots N$.

- Lobatto Funktionen. $\varphi_k(x) = \int_{-1}^{x} P_k(t)dt$, $k = 1, \ldots N$, wobei P_k das k-te Legendre Polynom ist.

Diskutieren Sie die unterschiedliche Struktur der entstehenden Steifigkeitsmatrizen.

Aufgabe 24 *(Exakte Lösung für eine spezielle rechte Seite)*

Bestimmen Sie die exakte Lösung u des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (-1,1). \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 25 *(Praktikum: am 20.6. während der Übung)*

Das Randwertproblem von Aufgabe 24 soll nun numerisch mit der Finiten Elemente Methode mit den verschiedenen Basisfunktionen aus Aufgabe 23 gelöst werden. Laden Sie hierfür die Code-Vorlage von der Vorlesungs-Homepage herunter und vervollständigen Sie den Code.

(a) Berechnen Sie für die Funktion $f(x)$ (siehe Aufg. 23) die rechte Seite mittels Quadratur. Für die Hut-Funktionen bietet sich die Matlab Funktion `quad` an. Für die anderen beiden Typen von Basis-Funktionen ist es am Besten, Gauss-Quadratur zu verwenden. Die Funktion gauss (gauss.m) liefert Gauss-Gewichte und -Knoten.

(b) Implementieren Sie die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix A.

(c) Testen Sie ihr Programm für verschiedene N.

(d) Berechnen Sie den L^2-Fehler $\|u - u_h\|_{L^2(-1,1)}$ (hier ist u die exakte und u_h die numerische Lösung) und zeichnen Sie den Fehler über N. Der Fehler soll hierbei mittels Quadratur berechnet werden (Matlab-Funktion `quad` für die Hut-Funktionen und Gauss-Quadratur für trigonometrische und Lobatto-Funktionen).