

Übungsblatt 7

(Besprechung Do. 27.6. 2013)

Aufgabe 26 Projektion

Wir betrachten wieder

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad x \in \Omega = (-1, 1). \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Die exakte Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = \frac{1}{4} \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ 2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Wir wollen nun die Lösung approximieren durch

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x),$$

wobei $\varphi_k(x) = \int_{-1}^x P_k(t) dt$ die Lobatto Funktionen sind. Hierfür projizieren wir die exakte Lösung u in den Raum, der von den Lobatto Funktionen aufgespannt wird, d.h. wir schreiben $u_N = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k$ und fordern

$$(u_N, \varphi_k) = (u, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N$$

mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u'(x)v'(x) dx.$$

- Leiten Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten α_k her. Sie brauchen Sie Integrale nicht auszurechnen (das macht Maple für uns, siehe Teil b).
- Die Datei `coeffu.txt` (Homepage) enthält die Koeffizienten der α_k Funktion u_N ($k = 1, \dots, 128$). Laden Sie die Koeffizienten in Matlab ein (`dload`), berechnen Sie den Fehler $\|u - u_N\|_{L^2(-1,1)}$ für $N = 1, \dots, 128$ mittels Gauss-Quadratur (wie in Aufgabe 25), zeichnen Sie den Fehler über N und vergleichen Sie den Fehler mit dem Ergebnis aus Aufgabe 25.

Aufgabe 26 (*FEM*)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f \quad x \in \Omega = (0, 1).$$

- (a) Leiten Sie die schwache Formulierung der Differentialgleichung her.
- (b) Stellen Sie für die Hut-Basis ein Gleichungssystem der Form $(A + B + C)u = f$ auf. Berechnen Sie die Einträge der drei Matrizen A, B und C auf dem Papier. Auf einem Element sollen die Koeffizienten $a(x), b(x), c(x)$ als konstant (angenähert durch den Wert des Mittelpunkts des jeweiligen Elements) angenommen werden.