Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

Nichtlineare Optimierung und optimale Steuerung - Übungsblatt 2

(Besprechung: Montag, 29. April 2013)

Aufgabe 4 *(AMPL)*

Zwei Produkte P_1 und P_2 durchlaufen in einem Betrieb bei der Produktion zwei Maschinen M_1 und M_2. Die Bearbeitungszeit pro Einheit seien in der folgenden Tabelle (in Stunden) gegeben

	M_1	M_2
P_1	1	1
P_2	2	1

Die monatlich verfügbare Arbeitszeit beträgt

- 170h für M_1
- 150h für M_2.

Der Gewinn von P_1 beträgt 250 Euro/Einheit und der Gewinn von P_2 beträgt 400 Euro/Einheit. Die Fixkosten für den Betrieb aller Maschinen belaufen sich auf 30000 Euro pro Monat.

a) Formulieren Sie ein geeignetes Optimierungsproblem.

b) Erstellen Sie in einer Datei `product.mod` das zugehörige `AMPL` Modell unabhängig von den Daten (Preis, Arbeitszeit), indem Sie Parameter benutzen.

c) Erstellen Sie eine Datei `product.data`, die zugehörigen Daten (als Parameter) des Modells beinhaltet.

d) Erstellen Sie in einer Datei `product.exec` ein ausführbares Skript, dass obiges Optimierungsproblem in `AMPL` mittels `KNITRO` löst. Führen Sie dann folgende Kommandos auf der `AMPL` Prompt aus.

```
ampl: reset;
ampl: include product.exec;
```

Hinweis: In das ausführbare Skript können Sie sämtliche Kommandos, die Sie bisher per Hand ausgeführt haben, einfügen.

Aufgabe 5 *(Schwache Konvergenz)*

Sei X ein normierter Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $x \in X$. Beweisen Sie folgende Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Rightarrow \qquad w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

also das aus (starker) (Norm-)Konvergenz immer auch die schwache Konvergenz folgt. Die Bezeichnung "w-lim" steht hierbei für den schwachen (engl. weak) Limes.

Hinweis: Es gilt für alle $\varphi \in X'$: $|\varphi(x)| \leq ||\varphi||\,||x||$ mit der endlichen Operatornorm $||\varphi|| < \infty$.

Aufgabe 6 *(Konvexe Funktionen)*

a) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f_i : C \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1 \ldots m$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

konvex auf C ist.

b) Zeigen Sie, dass für ein festes $z \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$f(x) := ||x - z||$$

konvex auf ganz $\mathbb{R}^n$ ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = e^x$$

strikt konvex auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7 *(Kompaktheit)*

Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\dim X < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad B_X := \{x \in X \ : \ ||x|| \leq 1\} \text{ ist kompakt.}$$

Hinweis: Benutzen Sie für die Rückrichtung das Lemma von Riesz.

Satz (Lemma von Riesz)
Sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $||x_\delta|| = 1$ und

$$||x_\delta - u|| \geq 1 - \delta \qquad \forall\, u \in U.$$