Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

Nichtlineare Optimierung und optimale Steuerung - Übungsblatt 7

(Besprechung: Montag, 3. Juni 2013)

Aufgabe 22 *(Regularität)*

Zeigen Sie, dass für das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung im $\mathbb{R}^n$ folgende Relation zwischen den Regularitätsbegriffen eines zulässigen Punktes $\bar{x}$ gilt:

$$\bar{x} \text{ erfüllt LICQ} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ erfüllt MFCQ} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ erfüllt Abadie-CQ}$$

Aufgabe 23 *(Regularität)*

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcrcl}
\min_{x\in\mathbb{R}^2} & f(x) & & & & \\
 & x_1^2 & + & 4x_2^2 & \leq & 4 \\
\text{s.t.} & (x_1-2)^2 & + & x_2^2 & \leq & 5 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

und ein Punkt $\bar{x} = (0,1)^T \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob dieser Punkt LICQ und MFCQ erfüllt.

Aufgabe 24 *(Minimalabstand)*

Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(5,2)^T$ von der Parabel

$$P = \{\, (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2 + 2x \,\}.$$

Stellen Sie das Problem grafisch dar und diskutieren Sie die KKT-Bedingungen.

Aufgabe 25 *(Beschränktes NLP)*

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) & = & -\frac{1}{2}\sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_2 & \\
 & x_1 & \geq & 0.1 \\
\text{s.t.} & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 1
\end{array}$$

und bestimmen Sie alle Punkte $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ und Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^3$, die den KKT-Bedingungen genügen.

Aufgabe 26 *(Gradientenverfahren)*

a) Implementieren Sie das Gradientenverfahren in `MATLAB` in einer Datei `gradientMethod.m` unter Verwendung der Armijo-Regel zur Schrittweitensteuerung (siehe Aufgabe 20) mit folgendem Funktionsaufruf

```
[x,fx,nit] = gradientMethod(f,gradf,x,sigma,beta,tol)
```

mit den Parametern

- `f` - die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als *function handle*
- `gradf` - der Gradient von f als *function handle*
- `x` - der Startpunkt $x \in \mathbb{R}^n$
- `sigma,beta` - die Konstanten $\sigma \in (0, 1)$ und $\beta \in (0, 1)$ für die Armijo-Regel
- `tol` - die Toleranz für das Abbruchkriterium

Zurückgegeben werden soll das Minimum `x` $= x^*$, der optimale Funktionswert `fx` $= f(x^*)$ und die Anzahl der Iterationsschritte `nit`.

b) Laden Sie das Skript `test_gradient.m` von der Vorlesungshomepage herunter und testen Sie ihre Funktion.

Aufgabe 27 *(Newtonverfahren)*

a) Implementieren Sie das Newtonverfahren in `MATLAB` in einer Datei `gradientMethod.m` ohne Schrittweitensteuerung mit folgendem Funktionsaufruf

```
[x,fx,nit] = newtonMethod(f,gradf,hessf,x,tol)
```

mit den Parametern

- `f` - die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als *function handle*
- `gradf` - der Gradient von f als *function handle*
- `hessf` - die Hesse-Matrix von f als *function handle*
- `x` - der Startpunkt $x \in \mathbb{R}^n$
- `tol` - die Toleranz für das Abbruchkriterium

Zurückgegeben werden soll das Minimum `x` $= x^*$, der optimale Funktionswert `fx` $= f(x^*)$ und die Anzahl der Iterationsschritte `nit`.

b) Laden Sie das Skript `test_newton.m` von der Vorlesungshomepage herunter und testen Sie ihre Funktion.

c) Berechnen Sie die Konditionszahl der Hesse-Matrix im optimalen Punkt und diskutieren Sie die Ergebnisse. Vergleichen Sie die Konvergenzrate des Gradientenverfahren mit der Rate des Newtonverfahren.

d) Schreiben Sie ein Skript `test_newton2.m`, welches das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

mittels Newtonverfahren löst. Verwenden Sie dazu `tol =` 10^{-12} und die Startwerte $x = 0.5$ und $x = 4$. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2013/nouos.html`