Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2014
Zusatztutorium-Blatt 8
17.06.2014

Angewandte Numerik 1

Besprechung: Dienstag, 24.06.2014 / Mittwoch, 25.06.2014

Aufgabe 19 *(Banachscher Fixpunktsatz mehrdimensional)*
Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunksatzes lässt sich untersuchen, ob eine nichtlineare Gleichung eine Lösung besitzt. Der Banach'sche Fixpunktsatz ist auch auf mehrdimensionale Funktionen anwendbar. Wir wollen nun zeigen, dass das System

$$\begin{pmatrix} \cos(x) + 2y \\ xy^2 + \sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt.
Dazu müssen wir das hier angegebene Problem zunächst in ein Nullstellenproblem $f(x,y) = (0,0)^T$ umschreiben. Um dieses Nullstellenproblem zu lösen, lässt sich ein äquivalentes Fixpunktproblem mit geeigneter Funktion $\Phi(x,y)$ betrachten, nämlich

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f(x,y),$$

denn es gilt: Falls (x^*, y^*) ein Fixpunkt der Funktion $\Phi(x,y)$ ist, so muss gelten: $f(x^*, y^*) = 0$.

- Bestimmen Sie zunächst die Funktion $f(x,y)$.
- Bestimmen Sie damit dann die Funktion $\Phi(x,y)$.
  (Tipp: Sie sollten $f(x,y)$ so wählen, dass die Funktion $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f(x,y)$ möglichst einfach wird, da wir diese nun genauer untersuchen werden.)

Um nun den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir überprüfen, ob die Voraussetzungen dafür gegeben sind. Als Norm verwenden wir dabei $\|\cdot\|_\infty$. Wir müssen nun also zeigen, dass $\Phi(x,y)$

- eine Selbstabbildung auf $E = [0,1] \times [0,1]$ und
- eine Kontraktion auf $E = [0,1] \times [0,1]$

ist. Dies kann durch Nachrechnen geschehen.

Hinweis zur Punktevergabe:
Für dieses Blatt werden 2 Votierpunkte vergeben:
- ein Punkt für die Selbstabbildung,
- ein Punkt für die Kontraktion.