Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2014
Zusatztutorium-Blatt 9
24.06.2014

Angewandte Numerik 1

Besprechung: Dienstag, 01.07.2014 / Mittwoch, 02.07.2014

Aufgabe 20 *(Horner Schema)*
Gegeben sei ein Polynom $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ vom Grad n. Dieses soll an einem Punkt $\tilde{x}$ ausgewertet werden.

- Um den Wert $p_n(\tilde{x})$ zu berechnen kann man einerseits den Ausdruck

  $$a_0 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots a_n\tilde{x}^n$$

  direkt auswerten.
  Wie viele Multiplikationen und Additionen sind dabei nötig?

- Andererseits kann man das Polynom auch umschreiben zu:

  $$a_0 + \tilde{x} \cdot (a_1 + \tilde{x} \cdot (a_2 + \tilde{x} \cdot (\dots (a_{n-1} + \tilde{x} \cdot a_n))))$$

  Wie viele Multiplikationen und Additionen sind nun nötig um diesen Ausdruck auszuwerten?

Aufgabe 21 *(Vandermonde-Matrix, MATLAB)*
Wir wollen eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ durch ein Polynom $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ vom Grad n approximieren. Von der Funktion $f(x)$ liegen $n + 1$ Funktionswerte $f_i,\ i = 0, \dots, n$ zu äquidistanten Stützsetellen $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ vor. Dann können die Koeffizienten a_i des Polynoms $p_n(x)$ mit Hilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Die Matrix in diesem Gleichungsyystem wird *Vandermonde-Matrix* genannt. Machen Sie sich klar, wie man auf diese Matrix kommt. Wir wollen diese Matrix nun numerisch untersuchen:

- Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, das für n=$1, \dots, 20$ die Kondition der Vandermonde-Matrix bestimmt und plotten Sie die Kondition. Verwenden Sie hierbei einen *geeigneten* Plotbefehl!

- Was fällt auf? Was bedeutet das für die so berechneten Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$?