Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1

Abgabetermin: Freitag, 13.06.2014, **vor der Übung**

Dieses Übungsblatt hat eine Bearbeitungszeit von zwei Wochen.
Für dieses Übungsblatt gibt es 19 Theorie- und 18 Matlab-Punkte, sowie 6 Theorie- und 14 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 3) bei 33,5 Theoriepunkten und 33 Matlabpunkten.

Aufgabe 16 *(Programmieraufgabe: Lineares Ausgleichsproblem)* (2T+3M Punkte)

Die Höhe des Wasserstandes in der Nordsee wird hauptsächlich durch die so genannte M_2-Tide bestimmt, deren Periode ca. 12 Stunden beträgt. Die Höhe des Wasserstandes h kann daher durch die Funktion

$$h(t) = x_1 + x_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + x_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

beschrieben werden (t in Stunden). Zur Bestimmung von x_1, x_2, x_3 sind bei Helgoland folgende Messungen durchgeführt worden:

t_i	0	2	4	6	8	10	Std.
h_i	1.9	3.0	2.6	1.1	0.4	1.5	Meter

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min!$.

b) Lösen Sie dieses lineare Ausgleichsproblem mittels Matlab. Der Befehl zum Lösen von Gleichungssystemen $Ax = b$ lautet `x=A\b`. Informieren Sie sich in der Matlab-Hilfe darüber, welche Bedeutung der Matlab-Operator \ im Falle eines über- oder unterbestimmten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ hat. Fertigen Sie mit Matlab eine Skizze an, in der die Ausgleichsfunktion und die Messdaten eingezeichnet sind. Verwenden Sie die Matlab Hilfe, um sich mit der Funktion `plot` vertraut zu machen. Beschriften Sie die Achsen Ihrer Zeichnung.

Aufgabe 17 *(Normalengleichung, Konditionsprobleme)* (2T+2M Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Matlab die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A. Dabei ist die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der nicht-quadratischen Matrix A definiert als das Verhältnis des größten zum kleinsten Singulärwert von A.

b) Berechnen Sie auf dem Papier per Hand $A^T A$ sowie wiederum mit Matlab die zugehörige Konditionszahl $\kappa_2(A^T A)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Nun betrachten Sie die folgende Störung

$$\Delta(A^T A) = \begin{pmatrix} -10^{-10} & 0 \\ 0 & -10^{-10} \end{pmatrix}.$$

Wie wirkt sich diese auf die Normalengleichung aus?

Aufgabe 18 *(Zwei Lösungswege für Ausgleichsprobleme)* (4T+5T Punkte)

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{13}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

also $m = 3$, $n = 2$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie jeweils auf dem Papier eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems über

a) die Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$

b) eine QR-Zerlegung mit Givens-Rotation.

Verwenden Sie zur Lösung der Normalengleichung das Cholesky-Verfahren.

Aufgabe 19 *(Programmieraufgabe: Lineares Ausgleichsproblem mit Givens-Rotation)* (1T+1M+3T+6M Punkte)

Gegeben sind die vier Messwert-Paare

x_i	-1.6	-0.9	0.75	2.7
y_i	1.6	-0.9	1.0	-1.0

Es ist bekannt, dass diese Messwerte zu einer Ellipse der Form

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - 10 = 0$$

mit unbekannten Parametern α, β und γ gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|Az - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Matlab. Fertigen Sie mit Matlab eine Skizze, in der die Ausgleichsellipse und die Messpunkte eingezeichnet sind. Beschriften Sie die Achsen Ihrer Zeichnung. Die Ellipse können Sie beispielsweise mit der Matlab-Funktion `ezplot` zeichnen.

c) Die Behandlung des obigen Ausgleichsproblems $(A|b)$ für vier Messwerte führt bei der Lösung mittels orthogonaler Transformation auf ein oberes Dreieckssystem $(R|Q^T b)$.

Nun erhalten Sie eine weitere Messung (x_5, y_5). Das zugehörige Ausgleichsproblem unter Verwendung von $(R|Q^T b)$ sei dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7.8 & 3.2 & -1.9 & -14 \\ 0 & -2.2 & 0.74 & -4.4 \\ 0 & 0 & -2.2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -0.26 \\ 5.85 & -2.4 & 0.98 & 10 \end{array}\right).$$

Lösen Sie dieses neue, erweiterte Ausgleichsproblem von Hand durch Anwendung von Givens-Rotationen. Geben Sie dabei die einzelnen Schritte und die Lösung $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ mit $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$ und $z_3 = \gamma$ sowie das unvermeidbare Residuum explizit an.

d) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil c) mit Matlab. Schreiben Sie hierzu eine Funktion `[Q, R] = qrGivens(A)`, welche eine QR-Zerlegung mittels Givens-Rotationen durchführt. Verwenden Sie dabei nicht die Matlab-Funktion `givens`.

Aufgabe 20 *(Householder-Spiegelung)* (2T+3T*+3T* Punkte)

Sei $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heisst die Matrix

$$P := I - 2\frac{ww^T}{w^T w}$$

Householder-Matrix und w der zugehörige Householder-Vektor.

a) Zeigen Sie: P ist symmetrisch und orthogonal.

b) Konstruieren Sie zum Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Householder-Matrix P, sodass x auf die x_1-Achse gespiegelt wird. Stellen Sie die Vektoren x, w und Px graphisch dar und erklären Sie die Bedeutung des Vektors w.

c) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix A mit Householder-Spiegelungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei alle Transformations-Matrizen $P^{(i)}$ sowie die Matrix Q und R explizit an.

Aufgabe 21 *(Programmieraufgabe: Householder-Spiegelung)* (6M*+3M*+4M*+1M* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Funktion `[Q, R] = qrHouseholder(A)`, die die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels Householder-Spiegelungen berechnet.

b) Verifizieren Sie mit Ihrer Funktion `[Q, R] = qrHouseholder(A)` das in Aufgabe 19 c) angegebene obere Dreieckssystem $(R|Q^T b)$ und die von Ihnen auf dem Papier berechnete Lösung des erweiterten Ausgleichsproblems. Geben Sie in Ihrer Funktion geeignete Zwischenergebnisse aus, so dass Sie sich den Ablauf des Algorithmus verdeutlichen können. Was beobachten Sie? Stimmen die mittels Householder-Transformationen errechneten Ergebnisse mit den mittels Givens-Rotationen erzielten Ergebnissen überein?

c) Schreiben Sie ein Skript `testRuntimeQR.m`, in dem Sie sich beispielsweise für $n = 2^3, ..., 2^{12}$ eine quadratische Matrix mit Zufallszahlen anlegen (Matlab-Funktion `rand`). Berechnen Sie anschließend für jede dieser Matrizen die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen. Verwenden Sie dazu Ihre Funktionen `[Q, R] = qrHouseholder(A)` und `[Q, R] = qrGivens(A)`. Messen die dabei jeweils die Zeit (`tic, toc`) und plotten Sie anschließend die Zeiten in Abhängigkeit von n in doppelt-logarithmischer Skala. Erklären Sie Ihre Ergebnisse. Hinweis: Um vergleichbare Laufzeiten zu erhalten, sollten Sie jetzt auf die Ausgabe von Zwischenergebnissen verzichten

d) Vergleichen Sie die Zeiten, die die von Ihnen geschriebenen Funktionen benötigen, auch mit den Zeiten, die die Matlab-Funktion `qr` benötigt.

Aufgabe 22 *(Programmieraufgabe: Bildkompression mit der Singulärwertzerlegung)*(4M+1M+1M Punkte)

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ und den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, mit $r = \text{rang}(A)$. Ferner seien $u^i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, m$ die Spaltenvektoren von U und $v^j \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$ die Spaltenvektoren von V. Für $0 < k < r$ definieren wir die Matrix

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u^i {v^i}^T$$

als Approximation von A.

Die Approximationseigenschaften von A_k lassen sich beispielsweise zur Datenkompression benutzen. Ein zweidimensionales Schwarzweißbild kann man im Rechner als Matrix speichern, bei der jeder Eintrag der Grauwert des Pixels in der entsprechenden Position ist.

a) Laden Sie mit

```
load gatlin
image (X)
colormap(map)
```

ein (in Matlab bereits gegebenes) Schwarzweißbild, welches sechs Numeriker (von links: J.H. Wilkinson, W. Givens, G. Forsythe. A. Housholder, G. Henrici, F.L. Bauer) auf der so genannten Gatlinburg-Tagung zeigt, in eine Skript-Datei. Speichern Sie das Bild mit Hilfe der Singulärwertzerlegung. Die Singulärwertzerlegung einer Matrix kann in Matlab mit dem Befehl `svd` berechnet werden (dies dauert ein bisschen). Rekonstruieren Sie das Bild mit $A_{40} = \sum_{i=1}^{40} \sigma_i u^i {v^i}^T$ und zeigen Sie die Rekonstruktion wieder an.

b) Wieviel Speicherplatz benötigt das Originalbild (dies können Sie in Ihrem Workspace sehen)? Welche Daten müssen Sie speichern, um A_k rekonstruieren zu können? Und wieviel Speicherplatz benötigen diese Daten?

c) Was beobachten Sie, wenn Sie k vergrössern oder verkleinern? Welches k ist für das menschliche Auge ausreichend? Wieviel Speicherplatz können Sie durch diese Bildkompression sparen?

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt03** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.