Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Übungsblatt 3

(Abgabe: Dienstag, 27. Mai 2014 **vor** der Übung)

Aufgabe 8 *(Sturmsche Ketten)* (3+5=8 Punkte)

Sei $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, p_0 = p$ und $p_1 = p'$. Dann bilden die Polynome p_i mit $i = 0, 1, ...m$, eine Sturmsche Kette, wenn diese aus der folgenden Rekursion solange konstruiert werden

$$p_{i-1}(x) = q_i(x)p_i(x) - p_{i+1}(x), \qquad \deg p_{i+1} < \deg p_i,$$

bis $p_m(x) = 0$.

a) Berechnen Sie die Sturmsche Kette, d.h. bestimmen Sie p_i für $i = 0, ..., m$.

b) Sei die Anzahl der Vorzeichenwechsel definiert in der Sturmschen Kette durch

$$w(x) := |\{i \in \{0, 1, ...m-1\} : p_i(x) \neq 0 \text{ und } p_{i+1}(x)p_i(x) \leq 0\}| .$$

Dann ist $N(a, b) := w(a) - w(b)$ die Anzahl der Nullstellen von p_0 in $(a, b]$. Bestimmen Sie

$$N\left(-3, -\frac{9}{10}\right), \quad N\left(-3, \frac{4-\sqrt{28}}{6}\right), \quad N(-1, 1), \quad N\left(-1, -\frac{9}{10}\right) \quad N\left(-3, \frac{4+\sqrt{28}}{6}\right) \quad \text{und} \quad N\left(-3, \frac{5}{2}\right).$$

Was kann man nun über die Lokalisation der Nullstellen aussagen?

Aufgabe 9 *(Symmetry of Orthogonal Polynomials, LaTeX)* (8 Punkte)

Let (p_n) be a sequence of orthogonal polynomials with respect to the scalar product

$$(f, g)_\omega := \int_{-a}^{a} f(x)g(x)\omega(x)\,dx$$

provided by a symmetric, positiv and integrable weight function $\omega : [-a, a] \to \mathbb{R}$. Show, that

$$p_k(-x) = (-1)^k p_k(x)$$

holds for all $x \in [-a, a]$ and $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 10 *(Tschebyscheff-Polynome)* (4+4+4=12 Punkte)

Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen auf ganz $\mathbb{R}$ die Drei-Term Rekursion

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \qquad k \geq 2$$

mit den Startwerten $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$. Zeigen Sie

a) Es gilt $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ für $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Die Nullstellen von T_n sind gegeben durch

$$x_k := \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \qquad k = 1, ..., n.$$

c) Die Tschebyscheff-Polynome besitzen die globale Darstellung

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^k\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 11 *(Legendre-Polynome)* (6+6=12 Punkte)

a) Die Legendre-Polynome erfüllen die Drei-Term Rekursion

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

mit den Startwerten $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n,$$

dass (P_n) ein Orthogonalsystem bildet, d.h.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0).$$

Hinweis: Sie dürfen die Formel $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx = \frac{2^{n+1} n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ *verwenden.*

b) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome für $n \in \mathbb{N}$ folgende Rekursionsgleichung erfüllen

$$(1-x^2) P_n'(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)).$$
