Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Übungsblatt 4

(Abgabe: Dienstag, 10. Juni 2014 **vor** der Übung)

Aufgabe 12 *(Gauß-Christoffel Quadratur, LaTeX)* (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Quadraturformel der Form

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

mit $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $0 < x_1 < x_2$, die alle Polynome $p \in \mathbb{P}_3$ exakt integriert.

Hinweis: Betrachten Sie $f(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2$ und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem.

Aufgabe 13 *(Quadratur)* (4+2+4+2+5=17 Punkte)

Sei $I = (-1, 1)$ und $\omega : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) = \log\left(\frac{2}{1+x}\right).$$

a) Bestimmen Sie monischen Orthogonalpolynome p_0, p_1 und p_2 bzgl. $(\cdot,\cdot)_\omega$.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von p_2.

c) Bestimmen Sie die Gewichte der Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

mit Hilfe der Formel aus Satz 3.4.31.

d) Sei $f \in C^4(I)$. Zeigen Sie, dass für diese Quadratur der Fehler gegeben ist durch

$$E_1(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{1294}{14175} \qquad \xi \in (-1, 1).$$

e) Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx$ mit Hilfe der Quadraturformel aus c) und bestimmen Sie jeweils den Quadraturfehler

$$(i) \quad f(x) = \sin(\pi x) \qquad (ii) \quad f(x) = \frac{1}{1+x+\varepsilon} \quad \text{ mit } \varepsilon \in \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right\}$$

Wie beurteilen Sie die Güte der Abschätzung wenn Sie die numerisch bestimmten Integralwerte mit den exakten Werten vergleichen?

Hinweis: Es gilt

(i) $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = -.7759291740995762481$

(ii) $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = 1.4367463668836809464$ mit $\varepsilon = 1$

(ii) $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = 6.0827514839094905872$ mit $\varepsilon = \frac{1}{10}$

(ii) $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = 15.676023761330536704$ mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$

(ii) $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\,dx = 30.531293229070779948$ mit $\varepsilon = \frac{1}{1000}$

Aufgabe 14 *(Radau-Quadratur)* (8+5=13 Punkte)

Die Radau-Quadratur unterscheidet sich zu Gauß-Quadratur dadurch, dass zu den inneren Quadraturpunkten noch zusätzlich ein Randpunkt als Quadraturpunkt hinzugenommen wird. Es lässt sich zeigen, dass diese Quadratur zu n inneren Punkten und einem Randpunkt nicht nur exakt ist für $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$, sondern auch für $p \in \mathbb{P}_{2n}$.

Sei $I = (-1, 1)$ und $\omega : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) = \log\left(\frac{2}{1+x}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k^* f(x_k^*)$$

gilt, mit

$$x_k^* = \begin{cases} \tilde{x}_k & , k = 1, ..., n \\ 1 & , k = n+1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \lambda_k^* = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\lambda}_i}{1-\tilde{x}_i} & , k = 1, ..., n \\ \dfrac{1}{2}\left(\mu_1 + \mu_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \frac{\tilde{x}_i + 1}{\tilde{x}_i - 1}\right) & , k = n+1 \end{cases}.$$

Dabei seien $\tilde{\lambda}_k$ sowie $\tilde{x}_k$ die Gewichte und Quadraturpunkt bzgl. $\tilde{\omega}(x) := (1-x)\omega(x)$ und μ_0, μ_1 das nullte bzw. erste Moment bzgl $\omega(x)$. Verwenden Sie für $f \in \mathbb{P}_m$ den Ansatz

$$f(x) = \frac{1-x}{2}\psi(x) + \frac{x+1}{2}f(1) \qquad \text{mit} \quad \psi \in \mathbb{P}_{m-1}.$$

b) Bestimmen Sie zu obigem I und ω die Radau-Quadratur mit einem inneren Punkt und dem rechten Randpunkt und berechnen Sie das folgende Integral approximativ mittels Radau-Quadratur

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) \cdot \log\left(\frac{2}{1+x}\right) dx.$$

Hinweis: Es gilt

$$\left(\int_{-1}^{1} x^k \omega(x)\,dx\right)_{k=0,1,\ldots} = \left(2, -1, \frac{8}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{46}{75}, ...\right)$$

und

$$\left(\int_{-1}^{1} x^k \tilde{\omega}(x)\,dx\right)_{k=0,1,\ldots} = \left(3, -\frac{17}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{32}{25}, \frac{253}{225}, ...\right)$$
