Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Übungsblatt 5

(Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2014 **vor** der Übung)

Aufgabe 15 *(Lagrange-Polynome)* (3+2+4=9 Punkte)

Seien $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Knoten. Die Lagrange-Polynome von Grad n sind definiert durch

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{P}_n, \qquad i = 0, ..., n.$$

Weiter sei auf $\mathbb{P}_n$ folgende Abbildung definiert

$$(p, q) := \sum_{k=0}^{n} p(x_k) q(x_k).$$

a) Zeigen Sie, dass $(\cdot, \cdot)$ auf $\mathbb{P}_n$ ein Skalarprodukt bildet.

b) Zeigen Sie, dass $\{L_i \,:\, i = 0, .., n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_n$ bzgl. $(\cdot, \cdot)$ bildet.

c) Seien nun die Stützstellen äquidistant verteilt, d.h. $x_i = x_0 + ih$ mit $h > 0$ und $x = x_0 + th$. Zeigen Sie

$$L_k(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (t - i).$$

Aufgabe 16 *(Interpolation Error)* (7 Punkte)

Let be $f \in C^3([a, b])$ and $P \in \mathbb{P}_2$ be the corresponding quadric interpolation polynomial resp. to the nodes $x_i = a + hi$, $i = 0, 1, 2$ and $h = (b - a)/2$. Show the following inequality

$$||f - P||_\infty \leq \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 \, ||f'''||_\infty \, .$$

Aufgabe 17 *(Lagrange, Newton, Aitken-Neville)* (4+4+4=12 Punkte)

Sei $f(x) = 3^x$ und seien die Stützstellen

x_0	x_1	x_2	x_3
-2	-1	0	1

gegeben.

a) Stellen Sie P_3 mit Hilfe der Lagrange'schen Interpolationsformel explizit dar und werten Sie anschließend das Polynom an der Stelle $x = 0.5$ aus.

b) Stellen Sie P_3 als Newton'sches Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen explizit dar und werten Sie anschließend das Polynom an der Stelle $x = 0.5$ aus.

c) Berechne Sie den Wert an der Stelle $x = 0.5$ des Interpolationspolynoms mit Hilfe des Aitken-Neville Schemas.

Aufgabe 18 *(Hermite Interpolation, LaTeX)* (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe dividierter Differenzen das Newton'sches Interpolationspolynom mit den Eigenschaften

$$P(1) = -2, \quad P'(1) = -2, \quad P''(1) = 0, \quad P(2) = -3 \qquad \text{und} \qquad P'(2) = 1.$$

Aufgabe 19 *(Horner Schema)* (3+5=8 Punkte)

Das Horner Schema[1] nutzt eine geschickte Umformung von Polynomen um die Auswertung von Funktionswerten und Ableitungen zu vereinfachen. Dabei werden die Werte jeweils rekursiv berechnet.

a) Wenden Sie das Horner Schema basierend auf monomialer Basis auf das Polynom

$$p(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 1$$

an, um den Funktionswert und die Ableitung an der Stelle $x = 2$ zu berechnen.

b) Leiten Sie ein modifiziertes Horner Schema her, das auf Polynome in Newtonbasisdarstellung angewendet werden kann, also

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n).$$

Verifizieren Sie das hergeleitete Schema, indem Sie den Funktionswert und den Wert der Ableitung von

$$p(x) = 2 + (x - 1) + 3(x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

an der Stelle $x = 3$ und $x = 4$ bestimmen.

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Horner-Scheme#Berechnung_der_Ableitung