Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Übungsblatt 7

(Abgabe: Dienstag, 22. Juli 2014 **vor** der Übung)

Hinweise

- Vorleistung: **140** Punkte auf den Theorieblättern und **60** Punkte auf den Matlabblätter
- Bitte melden Sie sich bis spätestens 22.07. im Hochschulportal für die Vorleistung an.
- Die Vorleistung wird in KW 30 verbucht, sodass Sie sich danach direkt für die Klausur anmelden können.
- Die **Klausur** findet am 02.08. von 8:00 - 10:00 Uhr statt. Die Hörsäle werden noch bekannt gegeben.
- Zugelassene Hilfsmittel: ein handgeschriebener (!) DIN A4 Zettel
- Die **Klausureinsicht** findet am 15.08. von 10:00-14:00 Uhr in He18, 1.20 statt.

Aufgabe 24 *(Bernstein-Polynome)* (2+2+3+3+5+5=20 Punkte)

Soll einen glatte Kurve erzeugt werden (z.B. in der Computergrafik), so könnte man mit interpolierenden Polynomen oder Splines arbeiten und den Verlauf der Kurve über die zu interpolierenden Paare (x_i, f_i) steuern. Interpolationspolynome und auch interpolierende Splines können allerdings negativ werden, selbst wenn alle $f_i \geq 0$ sind. Um dies zu vermeiden, verwendet man die Bernstein-Polynome n-ten Grades für $t \in [0,1]$

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \qquad i = 0, ..., n.$$

Zeigen Sie

a) B_i^n hat eine i-fache Nullstelle bei $t = 0$ und eine $(n-i)$-fache Nullstelle bei $t = 1$.

b) $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ für $i = 0, ..., n$ und $t \in [0,1]$.

c) $(1-t)B_0^n(t) = B_0^{n+1}(t)$ und $tB_n^n(t) = B_{n+1}^{n+1}(t)$.

d) $B_i^n(t) \geq 0$ auf $[0,1]$ für alle $i = 0, ..., n$ und B_i^n hat genau ein Maximum bei $t = i/n$.

e) Für $i = 1, ..., n-1$ genügen die Bernstein-Polynome folgende Rekursionsvorschrift

$$B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t).$$

f) Für $i = 1, ..., n-1$ genügt die Ableitung der Bernstein-Polynome folgende Rekursionsvorschrift

$$\frac{d}{dt}B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

Aufgabe 25 *(Bézier-Kurve, LaTeX)* (10 Punkte)

Eine Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ kann man mit

$$c(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i B_i^n(t)$$

erzeugen und ihren Verlauf über die Punkte $p_i \in \mathbb{R}^d, i = 0, ..., n$ steuern. Man nennt c eine *Bézier-Kurve* mit den zugehörigen *Bézier-Punkten* p_i. Die Kurve c interpoliert dabei **nicht** die Punkte p_i! Berechnen Sie die Bézier-Kurve in $\mathbb{R}^2$ zu $n = 2$ mit den Punkten

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 26 *(Weierstraß' Approximation Theorem)* (10 Punkte)

Let f be any continuous function defined on [0,1]. Then for all $x \in [0,1]$ and any positiv integer n, it holds

$$|f(x) - B^n(f;x)| \le \omega(f;\delta) \left(2 + \frac{1}{4n\delta^2}\right)$$

whereas

$$B^n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

and ω is the *modulus of continuity* of f, which is defined by

$$\omega(f;\delta) := \sup_{x,y \in [0,1], |x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Therefore ω is a measure of the uniformly continuity. Prove the following corollary

Let f satisfy a Lipschitz condition

$$|f(x) - f(y)| \le \lambda |x - y|$$

for all $x, y \in [0,1]$. Then for all $x \in [0,1]$

$$|f(x) - B^n(f;x)| \le \frac{9}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.$$