



Numerische Analysis - Matlabblatt 2
(Abgabe: bis Dienstag, 20. Mai 2014, Besprechung: Freitag, 23. Mai 2014)

Aufgabe 4 (*Addition, Multiplikation und Differentiation von Polynomen*) (6 Punkte)

Seien $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynome mit $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, sowie $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$.

a) Schreiben Sie drei Funktionen

- (i) `c = add(a,b)`
- (ii) `c = mult(a,b)`
- (iii) `c = derivative(a)`

die zu den Spaltenvektoren $a = (a_0, \dots, a_m)^T$ und $b = (b_0, \dots, b_n)^T$ jeweils die Koeffizienten des Polynoms $p + q$, $p \cdot q$ und der Ableitung p' als Spaltenvektor c ausgeben sollen. Dabei soll der führende Koeffizient, also die letzte Koordinate des Koeffizientenvektors, ungleich Null sein. Das Nullpolynom soll durch den „leeren Vektor“ $[]$ dargestellt werden.

b) Schreiben Sie eine Testskript `testPoly.m`, welches die Funktionen an den Beispielen

- i) $p(x) = 0$, $q(x) = 4x^2 - 3$
- ii) $p(x) = 2x^2 - 3x$, $q(x) = -2x^2 + 3x$

testet.

Aufgabe 5 (*Momente und Skalarprodukt*) (6 Punkte)

Sei $\omega : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive, integrierbare Funktion. Ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\omega$ über den Raum der Polynome \mathbb{P} mit

$$(p, q)_\omega := \int_r^s p(x)q(x)\omega(x) dx$$

ist eindeutig durch seine Momente

$$\mu_n = \int_r^s x^n \omega(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

bestimmt.

a) Schreiben Sie eine Funktion

$$\text{mu} = \text{myMoment}(n, \text{name})$$

welche für die Eingabeparameter $n \in \mathbb{N}_0$ und `name` als String die entsprechende Momente μ_0, \dots, μ_n berechnet. Dabei gilt für die Momente folgendes

Name	r	s	$\omega(x)$	μ_n
'legendre'	-1	1	1	n gerade: $\frac{2}{n+1}$, n ungerade: 0
'log'	0	1	$-\log x$	$\frac{1}{(n+1)^2}$
'tscheb'	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	n gerade: $\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n}$, n ungerade: 0
'laguerre'	0	∞	e^{-x}	$n!$
'hermite'	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	n gerade: $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, n ungerade: 0

b) Schreiben Sie eine Funktion

```
s = scalar(a,b,name)
```

welche für die Eingabeparameter

- **a**: der Koeffizientenvektor eines Polynoms $p \in \mathbb{P}$
- **b**: der Koeffizientenvektor eines Polynoms $q \in \mathbb{P}$
- **name**: String, der die Gewichtsfunktion festlegt

das Skalarprodukt $(p, q)_\omega$ berechnet. *Hinweis: Verwenden Sie myMoment und mult.*

c) Schreiben Sie ein Testskript `testMomentScalar.m`, welches beide Funktionen ausreichend und sinnvoll für die von Ihnen gewählte Beispiele testet. Beachten Sie hierbei, dass Sie alle Varianten testen sollen. Beispielsaufrufe sehen wir folgt aus

```
myMoment(5,'tscheb') = [3.1416; 0; 1.5708; 0; 1.1781; 0]  
scalar([1;0;-8;0;8],[0;5;0;-20;0;16],'tscheb') = 0
```

Aufgabe 6 (Determinant Representation of Orthogonal Polynomials)

(8 Punkte)

A positiv weight function ω on an interval determines a system of orthogonal polynomials P_n uniquely, apart from a constant factor. Using the moments of the weight function, i.e.

$$\mu_n = \int_r^s x^n \omega(x) dx,$$

we find a determinant representation formula for a point wise evaluation of such orthogonal polynomials. The representation is $(P_0(z) = 1)$ and

$$P_n(z) = \frac{\det M}{\det T} \quad n = 1, ..$$

with

$$M = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)} \quad \text{and} \quad T = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

a) Write a function

```
Pz = evalOrtho(z,n,name)
```

which calculates $P_n(z)$ for $n \in \mathbb{N}_0$ corresponding to the weight function defined through **name**.

b) Write a test script `plotOrtho.m`, which generates six plots

- $P_n(z)$ for $z \in [-1, 1]$ with **name** = 'legendre' and **n**=4,5,6
- $P_n(z)$ for $z \in [0, 1]$ with **name** = 'log' and **n**=4,5,6
- $P_n(z)$ for $z \in [-1, 1]$ with **name** = 'tscheb' and **n**=4,5,6
- $P_n(z)$ for $z \in [0, 5]$ with **name** = 'laguerre' and **n**=4,5,6
- $P_n(z)$ for $z \in [-2, 2]$ with **name** = 'hermite' and **n**=4,5,6
- $\log |P_n(z)|$ for $z \in \mathbb{C}$ with $\text{Re}(z), \text{Im}(z) \in [-4, 4]$, **name** = 'legendre' and **n**=5



Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2014/numana.html>