Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Matlabblatt 3

(Abgabe: **bis Dienstag, 3. Juni 2014**, Besprechung: Freitag, 6. Juni 2014)

Aufgabe 7 *(Monische Drei-Term Rekursion)* (12 Punkte)

Monische Orthogonalpolyome (p_n) haben als führenden Koeffizienten 1. Wenn zusätzlich $(xp_n, p_j) = (p_n, xp_j)$ für $n, j \geq 0$ gilt, dann erfüllen sie die folgende Drei-Term Rekursion

$$p_n(x) = (\alpha_n + x)p_{n-1}(x) + \gamma_n p_{n-2}(x), \qquad n = 1, 2, ...$$

mit $p_{-1}(x) := 0, p_0(x) := 1$ und den Koeffizienten

$$\alpha_n = -\frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega} \quad , \, n = 1, 2, ... \qquad \text{und} \qquad \gamma_n = \begin{cases} -\dfrac{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-2}, p_{n-2})_\omega} & , \, n \geq 2 \\ 0 & , \, n = 1 \end{cases}.$$

Sei $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Dann gilt für die folgenden Terme

$$(p_n, p_n)_\omega = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \mu_{i+j} \qquad \text{und} \qquad (xp_n, p_n)_\omega = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \mu_{i+j+1},$$

sofern die Momente μ_k für $k = 0, ..., 2n+1$ bekannt sind.

a) Schreiben Sie eine Funktion

```
Px = monic3term(n,x,name)
```

die zu

- `n` $\in \mathbb{N}_0$
- `x = [x1,x2,...,xm]`
- `name`: ein String zur Unterscheidung, welche Gewichtsfunktion verwendet wird. Also `'legendre'`, `'log'`, `'tscheb'`, `'laguerre'` oder `'hermite'`.

die Funktionswerte $p_k(x_i)$ für $k = 0, ..., n, \; i = 1, ..., m$ berechnet und in `Px` $\in \mathbb{R}^{n+1 \times m}$ zurückliefert.

b) Testen Sie die Funktion mit Hilfe des Skripts `testMonic.m`, welches auf der Vorlesungshomepage verfügbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie entweder ihre eigene Routine `myMoment` *aus Aufgabe 5 oder die gestellte Routine. Leiten Sie die rekursive Struktur der Polynomkoeffizienten her.*

Aufgabe 8 *(Numerische Bestimmung von Konstanten)* (8 Punkte)

Die Legendrepolynome P_n haben die Eigenschaft, dass $|P_n(x)| \leq 1$ auf [-1,1]. Um später erste Approximationen an Integrale vom Typ

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)| \; dx$$

zu bekommen, wollen wir nun die Ungleichung verschärfen. Das Ziel dieser Aufgabe wird es sein, eine Konstante $c(n)$ in Abhängigkeit von n zu bestimmen, sodass

$$|P_n(x)| \leq c(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Konstante hat die Gestalt

$$c(n) = \alpha \cdot n^{\beta}$$

mit $\beta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$

a) Schreiben Sie ein Skript `calConst.m`, welches die Asymptotik bestimmt und die Konstante α berechnet.

   Hinweise:

   - *Betrachten Sie die Funktion* $f(x,n) := \sqrt{1-x^2} \cdot |P_n(x)|$.
   - *Bestimmen Sie jeweils näherungsweise* $\max_{x \in [-1,1]} f(x,n)$.
   - *Lassen Sie* n *variieren, z.B.* $n = 2, ..., 1000$.
   - *Plotten Sie doppelt logarithmisch die numerische Asymptotik im Vergleich zu den anderen möglichen Asymptotiken für* $c(n)$.

b) Zeigen Sie, dass Ihre numerisch motivierte Abschätzung für n gerade und $x = 0$ asymptotisch scharf ist.

   Hinweise:

   - *Berechnen Sie jeweils unter Ausnutzung der Rekursionsformel* $P_{2n}(0)$.
   - *Betrachten Sie* $|P_{2n}(0)|^2$ *und dessen Asymptotik.*
   - *Das Wallissche Produkt*

     $$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

     können Sie ohne Beweis verwenden.