Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Sommersemester 2014

Numerische Analysis - Matlabblatt 4

(Abgabe: **bis Dienstag, 17. Juni 2014**, Besprechung: Freitag, 20. Juni 2014)

Aufgabe 9 *(Roots of Legendre Polynomials)* (10 Punkte)

In order to implement a Gauß-Legendre quadrature, we have to find all roots of Legendre polynomials. An asymptotic behavior for the roots of the n-th Legendre polynomial is provided by Francesco Tricomi's formula

$$x_i = \left(1 - \frac{n-1}{8n^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4n+2}\pi\right) + \mathcal{O}(n^{-4}) \qquad , i = 1, ..., n.$$

a) Write a function

```
x = legendreRoots(n,method)
```

which calculates all roots `x = [x1, x2, ..., xN]` of the n-th Legendre polynomial. Use `method = 'newton'` or `method = 'halley'` but implement both algorithms and use the initial guesses

$$x_i^{(0)} = \left(1 - \frac{n-1}{8n^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4n+2}\pi\right) \qquad , i = 1, ..., n$$

to find all roots. You can use the following break condition for the fix point iterations: $P_n(x_i^{(k)}) < tol$.

Hint: It holds

$$(1-x^2)P_n'(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}\left(P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)\right).$$

The roots of the first few Legendre polynomials are

$n=1$	0	
$n=2$	± 0.577350269189626	$= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
$n=3$	0	
	± 0.774596669241483	$= \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
$n=4$	± 0.339981043584856	$= \pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$
	± 0.861136311594053	$= \pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$
$n=5$	0	
	± 0.538469310105683	
	± 0.906179845938664	
$n=6$	± 0.238619186083197	
	± 0.661209386466264	
	± 0.932469514203152	

b) Write a test script `testLegendreRoots.m`, which tests your routine.

Aufgabe 10 *(Gauß-Legendre Quadratur)* (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine Gauß-Legendre Quadratur realisiert werden um Integrale vom Typ

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

numerisch zu lösen.

a) Schreiben Sie eine Funktion

```
Px = legendreNorm(n,x)
```

die zu $n \in \mathbb{N}_0$ und $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ die Werte der **orthonormierten** Legendrepolynome $\tilde{P}_j(x)$ für $j = 0, ..., n$ an den Stellen x_i für $i = 1, ..., m$ berechnet und in der Matrix `Px` $\in \mathbb{R}^{(n+1)\times m}$ zurückliefert. Verwenden Sie die Drei-Term Rekursion für $k \geq 0$

$$\sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{P}_{k+1}(x) = x\tilde{P}_k(x) - \sqrt{\beta_k}\tilde{P}_{k-1}(x) \qquad \left(\beta_0 = 2,\ \beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}},\ \tilde{P}_{-1} := 0,\ \tilde{P}_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

b) Schreiben Sie eine Funktion

```
I = quadLegendre(f,n)
```

welche zu einem *function handle* `f` und `n` $\in \mathbb{N}$ das folgende Integral mittels Gauß-Legendre Quadratur berechnet

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

wobei x_k die Nullstellen von P_n sind und die Gewichte mit Hilfe der orthonomierten Legendrepoylnome berechnet werden durch

$$\lambda_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{P}_i^2(x_k)\right)^{-1} \qquad k = 1, ..., n.$$

c) Schreiben Sie ein Skript `testQuad.m`, welches Ihre Routine für die Funktionen

$$(i) \quad f(x) = e^x \qquad (ii) \quad f(x) = \sin(\pi x) \qquad (iii) \quad f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$$

testet. Wie groß ist der Quadraturfehler für verschiedene $n \in \mathbb{N}$?

d) Schreiben Sie ein Skript `quadError.m`, welches für $n \in \{2, 2^2, ..., 2^{10}\}$ den Quadraturfehler für

$$f(x) = \frac{1}{1+x+\varepsilon}$$

und $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}\}$ doppelt-logarithmisch plottet. Was fällt auf? Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \begin{cases} 1.098612288668109691395... & ,\varepsilon = 1 \\ 3.044522437723422996500... & ,\varepsilon = 1/10 \\ 5.303304908059075751065... & ,\varepsilon = 1/100 \\ 7.601402334583733409385... & ,\varepsilon = 1/1000 \\ 9.903537551286169710593... & ,\varepsilon = 1/10000 \end{cases}.$$

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2014/numana.html`