Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik IV
SoSe 2014

# Übungsblatt 10

Besprechung 04.07.2014.

## Aufgabe 1 (Diskretes Maximumprinzip) (2+2+3 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *inversmonoton*, falls aus $Ax \leq Ay$ stets $x \leq y$ folgt. Zeigen Sie:

(i) Ist $A$ inversmonoton, dann ist $A$ invertierbar.

(ii) $A$ ist genau dann inversmonoton, wenn die Inverse keine negativen Elemente enthält, d.h. $A^{-1} \geq 0$ gilt.

(iii) Eine wichtig Teilklasse der inversmonotonen Matrizen sind die sogenannten M-Matrizen. $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist eine M-Matrix, wenn $A$ inversmonoton ist und $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ gilt. Zeigen Sie, dass die Matrix $A^{(m)}$ aus (4.4.2) eine M-Matrix ist und beweisen Sie somit das *diskrete Maximumprinip* (Lemma 4.4.1).

## Aufgabe 2 („Die vollkommene Norm ist normalerweise nicht die Norm“) (2+2 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 4.4.7 und 4.4.11 im Skript.

## Aufgabe 3 (Implementierung der FDM) (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{aligned} &Lu(t) = -[pu']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \qquad t \in I = [a,b],\\ &u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $p, q \in \mathcal{C}^1(I)$, $r, f \in \mathcal{C}(I)$. Zur Diskretisierung sei ein äquidistantes Punktgitter gegeben, d.h.

$$a = t_0 < t^1 < \dots < t^{N+1} = b, \qquad I_n = [t^{n-1}, t^n], \qquad h = \frac{b-a}{N+1}.$$

Das diskrete Problem sei nun gegeben durch

$$\begin{aligned} &L_h u_h^n = -\Delta_{\frac{h}{2}}[p^n \Delta_{\frac{h}{2}} u_h^n] + q^n \Delta_h u_h^n + r^n = f^n, \qquad n = 0, \dots, N,\\ &u_h^0 = \alpha, \qquad u_h^{N+1} = \beta, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei

$$\Delta_h u(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

den zentralen Differenzenquotienten beschreibt und wir abkürzend für die Funktionen $p^n = p(t^n), q^n = q(t^n), r^n u_h^n = r(t^n), f^n = f(t^n)$ schreiben. Machen Sie sich zunächst klar, dass $-\Delta_{\frac{h}{2}}[p^n \Delta_{\frac{h}{2}} u_h^n]$ eine Approximation an $-[pu']'(t)$ ist. Was gilt insbesondere, wenn $p(t) = 1$ ist? Wieso verwenden wir hier den zentralen Differenzenquotienten $\Delta_h u_h^n$ anstelle von $\frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ bzw. $\frac{u(t)-u(t-h)}{h}$?

Die Formulierung des diskreten Problems (2) führt uns zu einem linearen Gleichungssystem für den Vektor $u_h := (u_h^0, u_h^1, \dots, u_h^N, u_h^{N+1})$ der Form

$$A_h u_h = b_h.$$

Überlegen Sie sich, welche Gestalt $A_h$, $b_h$ besitzen. Überlegen Sie sich weiter, wie die Einträge aussehen. Implementieren Sie die FDM für das Sturm-Liouville-Problem. Sie sollten als Eingabe-Parameter $p, q, r, f$ als function-handle, das Intervall $[a, b]$, die Knotenanzahl $N$ übergeben bekommen. Ihre Funktion sollte dann den Koeffizientenvektor $u_h$ zurückliefern. Was ändert sich, wenn man keine äquidistante Schrittweite wählt?

Testen Sie Ihr Verfahren auf die folgenden Beispiele:

(i) $u'' + u = 0$, $I = [a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(a) = 0$, $u(b) = 1$. Dieses Beispiel besitzt offensichtlich die eindeutige Lösung $u(t) = \sin(t)$. Variieren Sie hier sinnvoll die Schrittweite!

(ii) $-\varepsilon u'' + u' = 0$, $I = [0, 1]$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$. Variieren Sie hierbei $\varepsilon \in \{1, 0.1, 0.01\}$ und jeweils $N \in \{10, 100, 1000\}$. Was stellen Sie fest?

**Hinweis:** Achten Sie auf effiziente Implementierung! Machen Sie sich klar, dass die Matrix $A_h$ viele Null-Einträge besitzt. Schauen Sie sich dazu die Funktion `spdiags` und `sparse` an. Achten Sie hierbei auch auf die Randbedingungen! Sie dürfen zum Lösen des Gleichungssystems den \-Operator in Matlab verwenden!